Методы оптимизации, ВМК, осень 2018

Экзамен: Список вопросов

Экзаменационные билеты

1 Метод градиентного спуска. Стратегии выбора длины шага. Скорость сходимости метода для сильно выпуклых функций (с доказательством). ([11], раздел 2.1.5; [12], разделы 2.2, 3.2, 3.3)

2 Метод Ньютона, его локальная скорость сходимости (с доказательством). Глобальная сходимость (с доказательством). Модификации метода Ньютона для невыпуклых задач оптимизации. ([11], раздел 1.2.4; [12], разделы 3.3, 3.4)

3 Метод сопряженных градиентов для решения системы линейных уравнений. Доказательство сходимости метода за конечное число итераций. ([12], раздел 5.1)

4 Неточный метод Ньютона (HFN), его скорость сходимости. Способы оценивания произведения гессиана на вектор. ([12], раздел 7.1)

5 Квазиньютоновские методы. Схемы BFGS и L-BFGS. ([12], разделы 6.1, 6.2, 7.2)

6 Стандартные классы выпуклых задач: линейное программирование (LP), коническое квадратичное программирование (CQP/SOCP), полуопределенное программирование (SDP). Примеры задач для каждого из классов. Сводимость. L/CQ/SD-представимые множества и функции. ([2], разделы B.2.4.1, 2.3 и 3.2; [6], глава 4)

7 Прямой метод внутренней точки для выпуклых задач условной оптимизации с ограничениями вида равенств и неравенств. ([6], глава 10)

8 Прямо-двойственный метод внутренней точки для выпуклых задач условной оптимизации с ограничениями вида равенств и неравенств. ([6], глава 11)

9 Субградиентный метод (с доказательством скорости сходимости). Различные способы выбора длины шага. ([11], раздел 3.2.3; [14], глава 5)

10 Градиентный метод для задачи композитной оптимизации (с доказательством скорости сходимости). ([1], разделы 10.1, 10.2 и 10.4)

11 Быстрый градиентный метод для выпуклой композитной оптимизации (с доказательством скорости сходимости). ([11], раздел 6.1.3)

12 Определение сглаживаемой функции. Основные операции, сохраняющие сглаживаемость (с доказательством). Теорема о двойственности гладкости и сильной выпуклости. Общая техника сглаживания через сопряженную функцию, примеры применения. Оценка трудоемкости минимизации сглаживаемой функции с помощью быстрого градиентного метода (с доказательством), сравнение с субградиентным методом. ([11], раздел 6.1; [1], раздел 10.8)

13 Градиентный метод для стохастической оптимизации (с доказательством скорости сходимости). ([10], раздел 14.1; [8], раздел 2.4)

14 Случайный координатный спуск (с доказательством скорости сходимости). Примеры функций, допускающих эффективный пересчет компонент градиента при координатных обновлениях. Применение для задачи минимизации эмпирического риска.

Теоретический минимум

Ниже перечислены вопросы, незнание ответа на которые во время экзамена автоматически влечет неудовлетворительную итоговую оценку. Необходимо знать сновные определения и формулировки утверждений/теорем; доказательства знать не требуется.

1 Общее определение производной функции (через линейное отображение). Основные свойства производной (правила суммы, произведения и композиции). Определения второй производной, градиента и гессиана. ([3], раздел A.6; [13], глава X)

2 Выпуклые множества и функции. Операции, сохраняющие выпуклость. Простейшие свойства выпуклых функций (неравенство Йенсена, выпуклость надграфика, выпуклость множеств подуровней). Дифференциальные критерии выпуклости. ([9], глава B; [11], раздел 3.1; [6], разделы 2, 3, 4)

3 Классы гладких выпуклых и сильно выпуклых функций. Соответствующие глобальные верхние и нижние оценки на функцию. ([11], разделы 1.2.2, 2.1.1, 2.1.3)

4 Определения субградиента и субдифференциала. Субдифференциальное исчисление (умножение на скаляр, композиция с аффинным преобразованием, теорема Моро–Рокафеллара, максимум конечного числа функций и теорема Данскина). ([11], раздел 3.1; [1], глава 3; [9], глава D)

5 Сопряженная функция Фенхеля. Неравенство Фенхеля–Юнга. Теорема Фенхеля–Моро. Связь сопряженной функции с субдифференциалом. ([1], глава 4; [4], раздел 7).

6 Проксимальный оператор. Связь с евклидовой проекцией. ([1], глава 6)

7 Теорема Каруша–Куна–Таккера для общей задачи нелинейного программирования. ([3], глава 4; [5], раздел 7.2)

8 Замкнутые функции. Эквивалентные определения и критерии. ([1], разделы 2.1, 2.2)

9 Сопряженная норма. Неравенство Гельдера. Основные примеры. ([1], раздел 1.11)

10 Двойственная задача Лагранжа и ее основные свойства. ([6], раздел 5; [14], раздел 9.1.3; [3], раздел 3.3)

11 Двойственность Фенхеля. Теорема Фенхеля–Рокафеллара. ([5], раздел 3.3)

12 Условия Армихо и Вульфа для неточной одномерной оптимизации. Процедура бэктрекинга. ([12], раздел 3.1)

13 Общая схема методов SAG и SVRG. ([7], раздел 6.3)

14 Метод Ньютона для минимизации на аффинном подпространстве. ([6], глава 10)

15 Общая схема метода барьеров. ([6], глава 10)

Список литературы

[1] Amir Beck. *First-Order Methods in Optimization*, volume 25. SIAM, 2017.

[2] Ahron Ben-Tal and Arkadi Nemirovski. *Lectures on modern convex optimization: analysis, algorithms, and engineering applications*, volume 2. SIAM, 2001.

[3] Ahron Ben-Tal and Arkadi Nemirovski. *Optimization III. Lecture notes.* 2015.

[4] Dimitri P Bertsekas, Angelia Nedi, Asuman E Ozdaglar, et al. Convex analysis and optimization. 2003.

[5] Jonathan Borwein and Adrian S Lewis. *Convex analysis and nonlinear optimization: theory and examples.* Springer Science & Business Media, 2010.

[6] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization.* Cambridge university press, 2004.

[7] Sébastien Bubeck et al. Convex optimization: Algorithms and complexity. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, 8(3-4):231–357, 2015.

[8] John Duchi. Introductory lectures on stochastic optimization. *Park City Mathematics Institute, Graduate Summer School Lectures*, 2016.

[9] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Claude Lemaréchal. *Convex analysis and minimization algorithms I: Fundamentals*, volume 305. Springer science & business media, 2013.

[10] Arkadi Nemirovski. Efficient methods in convex programming. 2005.

[11] Yurii Nesterov. *Lectures on convex optimization.* Springer, 2018.

[12] Jorge Nocedal and Stephen J Wright. Numerical optimization 2nd, 2006.

[13] Владимир Антонович Зорич. Математический анализ. Ч. 2. 6-е изд., испр. и доп. 2012.

[14] Борис Теодорович Поляк. Введение в оптимизацию. 1983.