

Прикладной статистический анализ данных.  
6. Анализ зависимостей.

Рябенко Евгений  
riabenko.e@gmail.com

10 октября 2014 г.

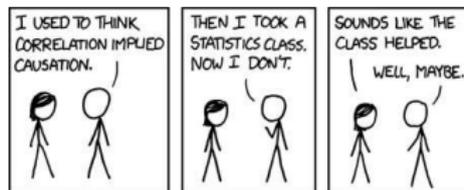
## Задача исследования взаимосвязи между признаками

Дано: значения признаков  $X_1, X_2$  измерены на объектах  $1, \dots, n$ .  
Эквивалентная формулировка: имеются связанные выборки  
 $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$  и  $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$ .

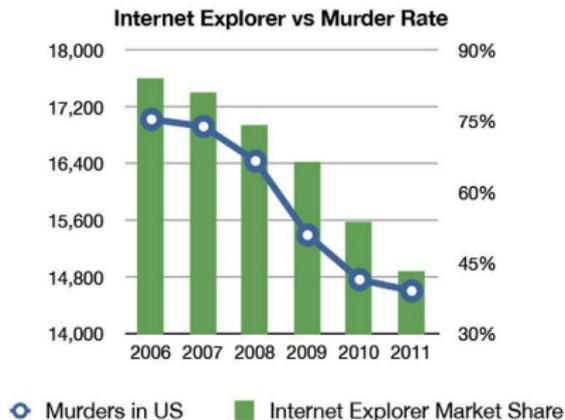
Насколько сильно признаки  $X_1, X_2$  связаны между собой?

Статистическая взаимосвязь между случайными величинами —  
**корреляция.**

# Корреляция и причинность



**Корреляция** — статистическая взаимосвязь между случайными величинами; не является достаточным условием причинно-следственной:



Другие примеры: <http://www.tylervigen.com/>

## Корреляция Пирсона

**Коэффициент корреляции Пирсона**  $r_{X_1 X_2}$  случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  — мера силы **линейной** корреляции между ними:

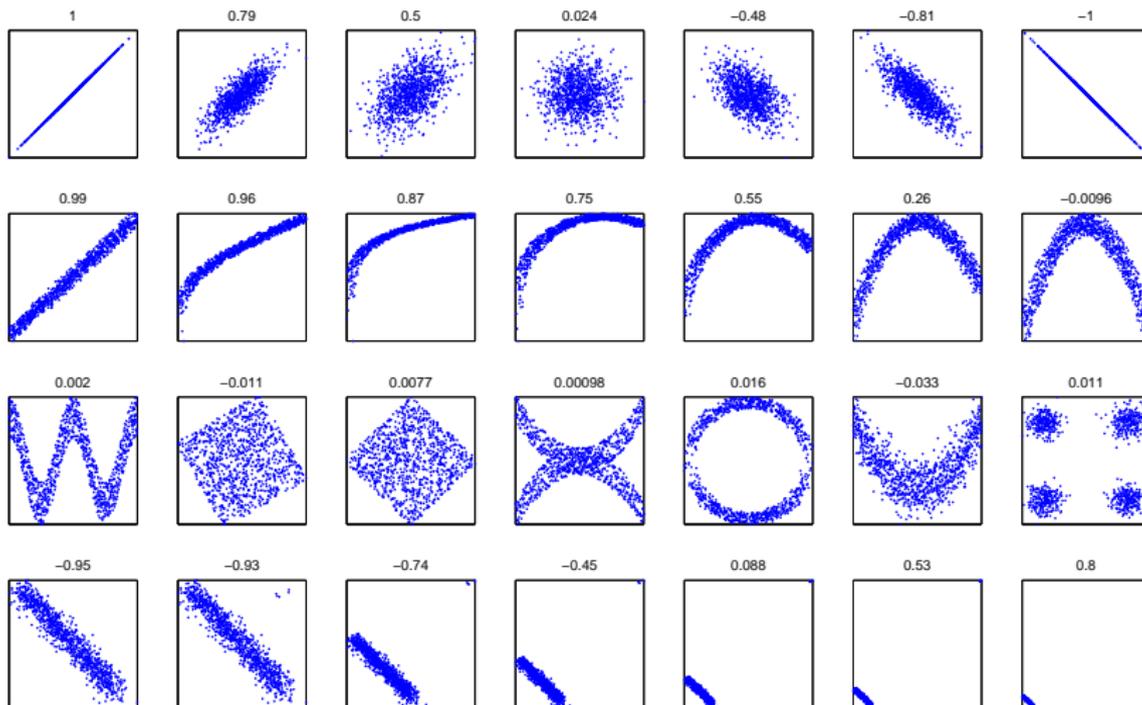
$$r_{X_1 X_2} = \frac{\mathbb{E}((X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_2 - \mathbb{E}X_2))}{\sqrt{\mathbb{D}X_1 \mathbb{D}X_2}}.$$

$$r_{X_1 X_2} \in [-1, 1].$$

Пусть имеется простая выборка пар  $(X_{1i}, X_{2i}), i = 1, \dots, n$ .  
Выборочный коэффициент корреляции Пирсона:

$$r_{X_1 X_2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i} - \bar{X}_1)(X_{2i} - \bar{X}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 \sum_{i=1}^n (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}}.$$

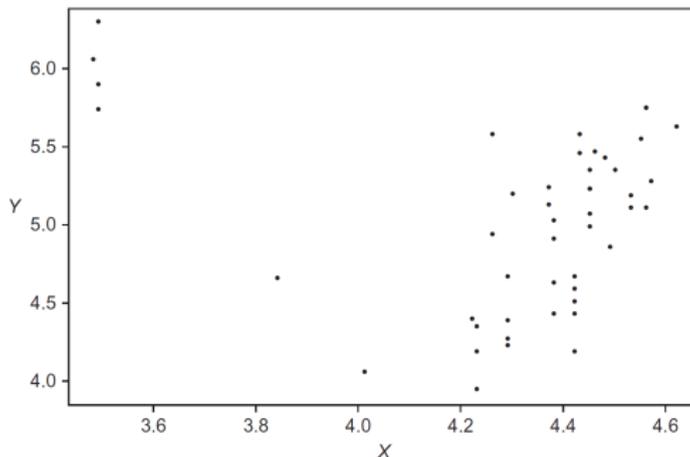
## Корреляция Пирсона



## Корреляция Пирсона

Недостатки выборочного коэффициента Пирсона:

- для распределений, отличных от нормального, перестаёт быть эффективной оценкой популяционного коэффициента корреляции;
- служит мерой только линейной взаимосвязи;
- неустойчив к выбросам.



Корреляция между логарифмами эффективной температуры на поверхности звезды ( $X$ ) и интенсивности её света ( $Y$ ) получается отрицательной ( $r_{XY} = -0.21$ ) из-за наличия в выборке красных гигантов.

## Критерий Стьюдента

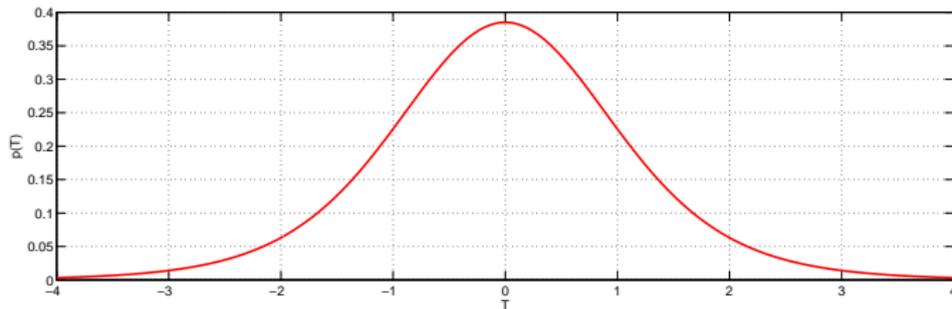
выборки:  $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$ ,  
 $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$ , выборки связанные,  
 $(X_1, X_2) \sim N(\mu, \Sigma)$ ;

нулевая гипотеза:  $H_0: r_{X_1 X_2} = 0$ ;

альтернатива:  $H_1: r_{X_1 X_2} < \neq > 0$ ;

статистика:  $T(X_1^n, X_2^n) = \frac{r_{X_1 X_2} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{X_1 X_2}^2}}$ ;

$T(X_1^n, X_2^n) \sim St(n-2)$  при  $H_0$ .



## Критерий Стьюдента

Доверительный интервал для коэффициента корреляции Пирсона:

$$\left[ r_{X_1 X_2} + \frac{t_{n-2, \alpha/2} (1 - r_{X_1 X_2}^2)}{\sqrt{n}}, r_{X_1 X_2} - \frac{t_{n-2, \alpha/2} (1 - r_{X_1 X_2}^2)}{\sqrt{n}} \right].$$

С использованием преобразования Фишера:

$$\left[ \tanh \left( \operatorname{arctanh} r_{X_1 X_2} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}} \right), \tanh \left( \operatorname{arctanh} r_{X_1 X_2} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}} \right) \right].$$

## Критерий Стьюдента

**Пример:** для двух марок зубной пасты, одна из которых рекламируется по телевизору, а другая нет, участники опроса (30 человек) выставляют оценки в баллах от 1 до 20 в соответствии со своими предпочтениями. Коэффициент корреляции Пирсона между оценками двух марок составляет 0.32, значимо ли эта величина отличается от нуля?

$$H_0: r_{X_1 X_2} = 0.$$

$$H_1: r_{X_1 X_2} \neq 0 \Rightarrow p = 0.0847.$$

Доверительный интервал:  $[-0.0157, 0.6557]$ .

С использованием преобразования Фишера:  $[-0.0455, 0.6100]$ .

## Перестановочный критерий

выборки:  $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$ ,

$X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$ , выборки связанные;

нулевая гипотеза:  $H_0: r_{X_1 X_2} = 0$ ;

альтернатива:  $H_1: r_{X_1 X_2} < \neq > 0$ ;

статистика:  $T(X_1^n, X_2^n) = r_{X_1 X_2}$ .

Нулевое распределение  $T(X_1^n, X_2^n)$  порождается группой перестановок

$$G = \{g: gX_2^n = (X_{2\pi_1}, \dots, X_{2\pi_n})\},$$

где  $\pi_1, \dots, \pi_n$  — перестановка индексов  $1, \dots, n$ ;

$$|G| = n!$$

Достижимый уровень значимости:

$$p(t) = \begin{cases} \frac{\sum_{g \in G} [T(X_1^n, gX_2^n) \leq t]}{n!}, & H_1: r_{X_1 X_2} < 0, \\ \frac{\sum_{g \in G} [|T(X_1^n, gX_2^n)| \geq |t|]}{n!}, & H_1: r_{X_1 X_2} \neq 0. \end{cases}$$

## Перестановочный критерий

Перестановочный  $100(1 - \alpha)\%$  доверительный интервал для коэффициента корреляции образован выборочными квантилями порядка  $\alpha/2$  и  $1 - \alpha/2$  перестановочного распределения  $T(X_1^n, gX_2^n)$ .

**Пример:** в предыдущем примере

$$H_0: r_{X_1X_2} = 0.$$

$$H_1: r_{X_1X_2} \neq 0 \Rightarrow p = 0.0564.$$

## Корреляция Спирмена

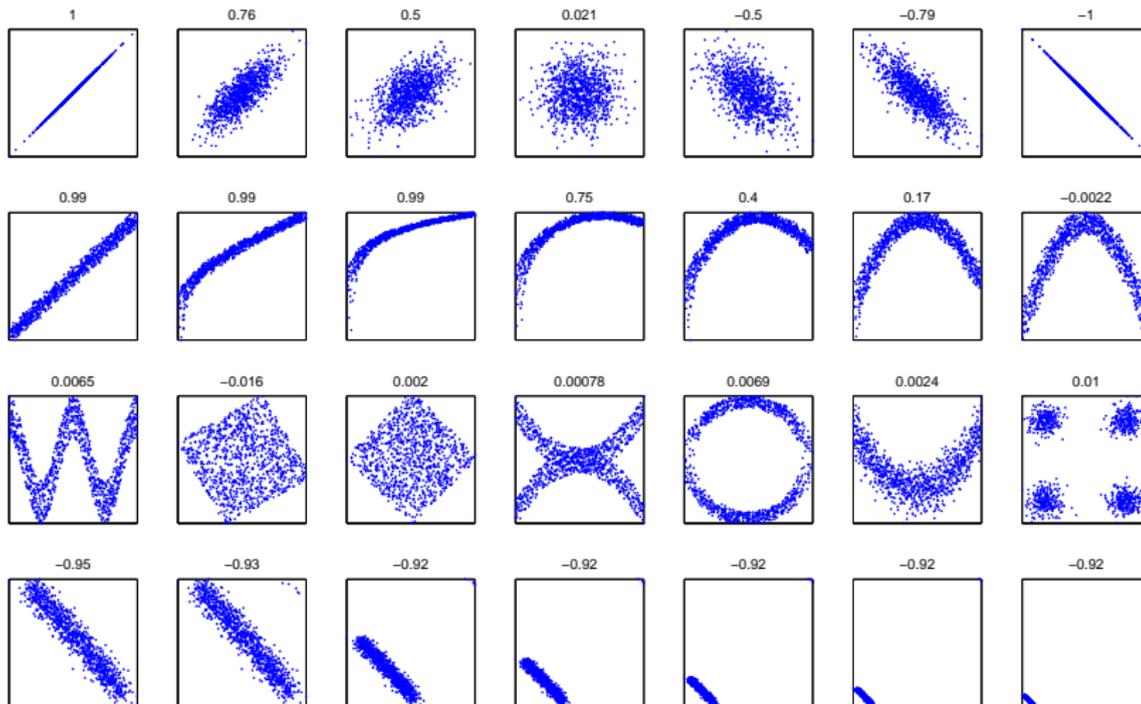
**Коэффициент корреляции Спирмена**  $\rho_{X_1 X_2}$  случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  — мера силы **монотонной** корреляции между ними; равен коэффициенту корреляции Пирсона между рангами наблюдений.

Выборочный коэффициент корреляции Спирмена:

$$\begin{aligned} \rho_{X_1 X_2} &= \frac{\sum_{i=1}^n \left( \text{rank}(X_{1i}) - \frac{n+1}{2} \right) \left( \text{rank}(X_{2i}) - \frac{n+1}{2} \right)}{\frac{1}{12} (n^3 - n)} = \\ &= 1 - \frac{6}{n^3 - n} \sum_{i=1}^n \left( \text{rank}(X_{1i}) - \text{rank}(X_{2i}) \right)^2, \end{aligned}$$

$\text{rank}(X_{1i})$ ,  $\text{rank}(X_{2i})$  — ранги  $i$ -х наблюдений в соответствующих выборках.

## Корреляция Спирмена



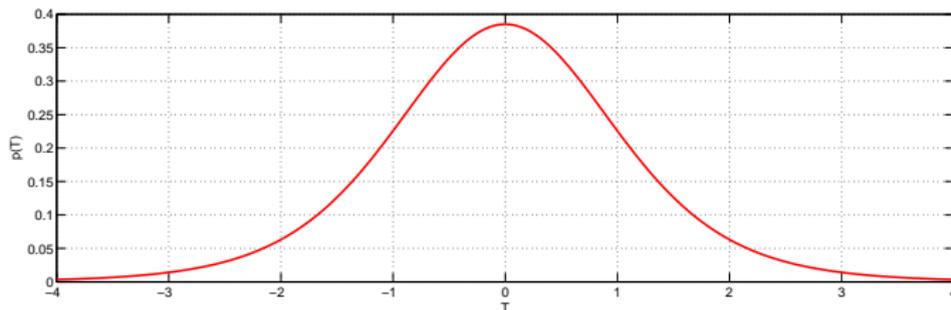
## Критерий Стьюдента

выборки:  $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$ ,  
 $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$ , выборки связанные;

нулевая гипотеза:  $H_0: \rho_{X_1 X_2} = 0$ ;

альтернатива:  $H_1: \rho_{X_1 X_2} < \neq > 0$ ;

статистика:  $T(X_1^n, X_2^n) = \frac{\rho_{X_1 X_2} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho_{X_1 X_2}^2}}$ ;  
 $T(X_1^n, X_2^n) \sim St(n-2)$  при  $H_0$ .



## Критерий Стьюдента

**Пример:** выборка из 11 потребителей вегетарианских сосисок оценивает качество двух брендов. Если целевая аудитория двух брендов совпадает, то их рекламу можно давать совместно. Корреляция Спирмена оценок потребителей равна  $-0.854$

$$H_0: \rho_{X_1 X_2} = 0.$$

$$H_1: \rho_{X_1 X_2} \neq 0 \Rightarrow p = 0.0024.$$

## Корреляция Кендалла

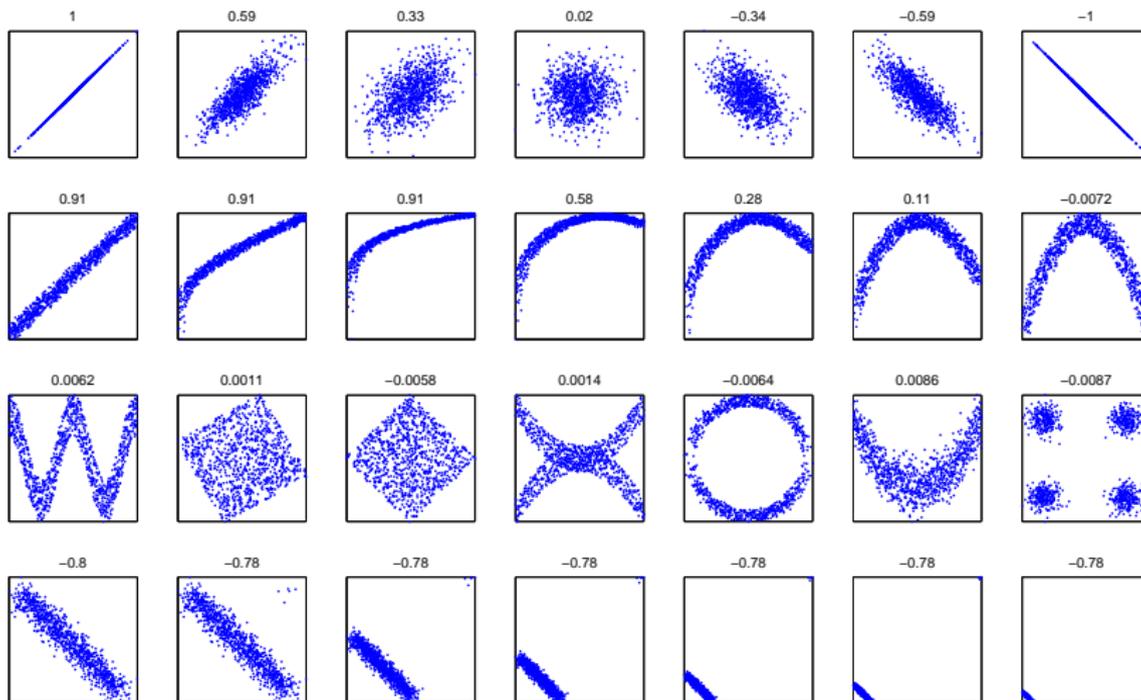
**Коэффициент корреляции Кендалла**  $\rho_{X_1 X_2}$  случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  — мера их взаимной неупорядоченности; также оценивает силу **монотонной** корреляции между величинами.

Выборочный коэффициент корреляции Кендалла:

$$\tau_{X_1 X_2} = 1 - \frac{4}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n [[X_{1i} < X_{1j}] \neq [X_{2i} < X_{2j}]] = \frac{C - D}{C + D},$$

где  $C$  — число согласованных пар,  $D$  — число несогласованных пар.

## Корреляция Кендалла



## Критерий без названия

- выборки:  $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n}),$   
 $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n}),$  выборки связанные;
- нулевая гипотеза:  $H_0: \tau_{X_1 X_2} = 0;$
- альтернатива:  $H_1: \tau_{X_1 X_2} < \neq > 0;$
- статистика:  $\tau_{X_1 X_2}$  имеет табличное распределение при  $H_0.$

При справедливости  $H_0$

$$\mathbb{E}\tau_{X_1 X_2} = 0, \quad \mathbb{D}\tau_{X_1 X_2} = \frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}.$$

Для  $n > 10$  справедлива аппроксимация нормальным распределением.

## Критерий без названия

**Пример:** налоговый инспектор хочет проверить наличие взаимосвязи между величинами общего дохода от инвестиций и общего объёма дополнительных доходов. На выборке из 10 налоговых деклараций он получил  $D = 5$ ,  $C = 38$ ,  $\tau_{X_1X_2} = 0.7821$ .

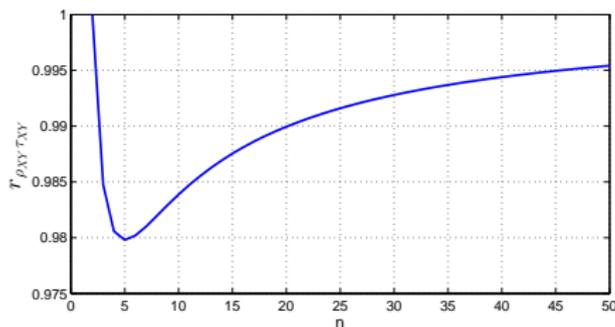
$$H_0: \tau_{X_1X_2} = 0.$$

$$H_1: \tau_{X_1X_2} \neq 0 \Rightarrow p = 0.0027.$$

## Связь между коэффициентами корреляции

При справедливости  $H_0$  (отсутствии монотонной зависимости):

$$r_{\rho_{X_1 X_2} \tau_{X_1 X_2}} = \frac{2n+2}{\sqrt{4n^2+10n}}$$



<http://youtu.be/D56dvoVrBBE>: по сравнению с корреляцией Спирмена, корреляция Кендалла

- менее чувствительна к большим различиям между рангами наблюдений;
- точнее оценивается по выборке небольших объёмов;
- обычно меньше по модулю.

$$(X_1, X_2) \sim N(\mu, \Sigma) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \tau_{X_1 X_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \rho_{X_1 X_2} = \frac{2}{\pi} \arcsin r_{X_1 X_2}.$$

## Частная корреляция

Если мы подозреваем, что наблюдаемая линейная взаимосвязь между признаками  $X_1$  и  $X_2$  вызвана влиянием третьего признака  $X_3$ , можно попытаться его снять.

Частная корреляция:

$$r_{X_1 X_2 | X_3} = \frac{r_{X_1 X_2} - r_{X_1 X_3} r_{X_2 X_3}}{\sqrt{(1 - r_{X_1 X_3}^2)(1 - r_{X_2 X_3}^2)}}.$$

Если нужно снять влияние нескольких признаков, можно пользоваться рекуррентной формулой:

$$r_{X_1 X_2 | X_3 X_4} = \frac{r_{X_1 X_2 | X_4} - r_{X_1 X_3 | X_4} r_{X_2 X_3 | X_4}}{\sqrt{(1 - r_{X_1 X_3 | X_4}^2)(1 - r_{X_2 X_3 | X_4}^2)}}.$$

Другой вариант: если  $M$  — множество признаков,  $\Omega$  — обратимая матрица их выборочных корреляций,  $R = \Omega^{-1}$ , то

$$r_{X_i X_j | M \setminus \{X_i, X_j\}} = -\frac{r_{ij}}{\sqrt{r_{ii} r_{jj}}}.$$

## Критерий Стьюдента

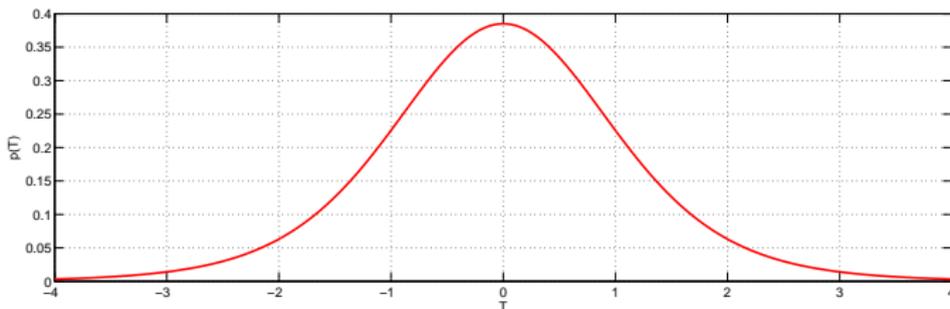
выборки:  $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n}), X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n}),$   
 $X_3^n = (X_{31}, \dots, X_{3n}), X_3 \in \mathbb{R}^M,$   
 $(X_1, X_2, X_3) \sim N(\mu, \Sigma);$

нулевая гипотеза:  $H_0: r_{X_1 X_2 | X_3} = 0;$

альтернатива:  $H_1: r_{X_1 X_2 | X_3} < \neq > 0;$

статистика:  $T(X_1^n, X_2^n, X_3^n) = \frac{r_{X_1 X_2 | X_3} \sqrt{n-M-2}}{\sqrt{1-r_{X_1 X_2 | X_3}^2}};$

$T(X_1^n, X_2^n, X_3^n) \sim St(n - M - 2)$  при  $H_0.$



## Множественная корреляция

Для того, чтобы оценить силу линейной взаимосвязи одной переменной ( $X_1$ ) с несколькими другими ( $X_2, X_3$ ), используется множественная корреляция:

$$r_{X_1, X_2, X_3} = \frac{r_{X_1 X_2}^2 + r_{X_1 X_3}^2 - 2r_{X_1 X_2} r_{X_1 X_3} r_{X_2 X_3}}{1 - r_{X_2 X_3}^2}.$$

Для большего числа признаков: пусть  $M$  — множество дополнительных признаков,  $\Omega$  — обратимая матрица их выборочных корреляций,  $R = \Omega^{-1}$ ,  $c$  — вектор корреляций основного признака  $X$  с дополнительными; тогда

$$r_{X, M}^2 = c^T R c.$$

Находится такая линейная комбинация признаков из  $M$ , что корреляция  $X$  с ней максимальна.

$$r_{X, M} \in [0, 1].$$

## Критерий Фишера

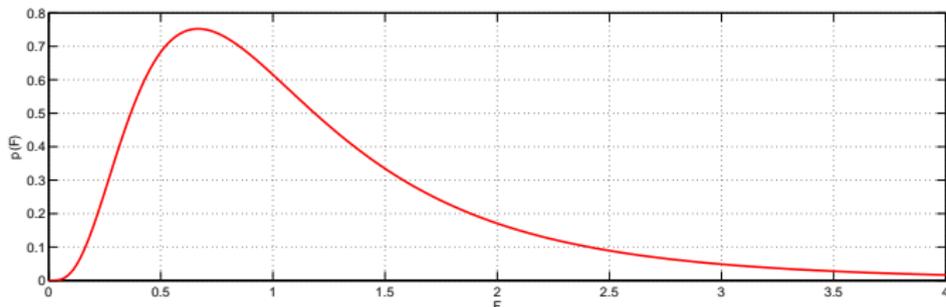
выборки:  $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$ ,  
 $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$ ,  $X_2 \in \mathbb{R}^M$ ,  
 $(X_1, X_2) \sim N(\mu, \Sigma)$ ;

нулевая гипотеза:  $H_0: r_{X_1, X_2} = 0$ ;

альтернатива:  $H_1: r_{X_1, X_2} > 0$ ;

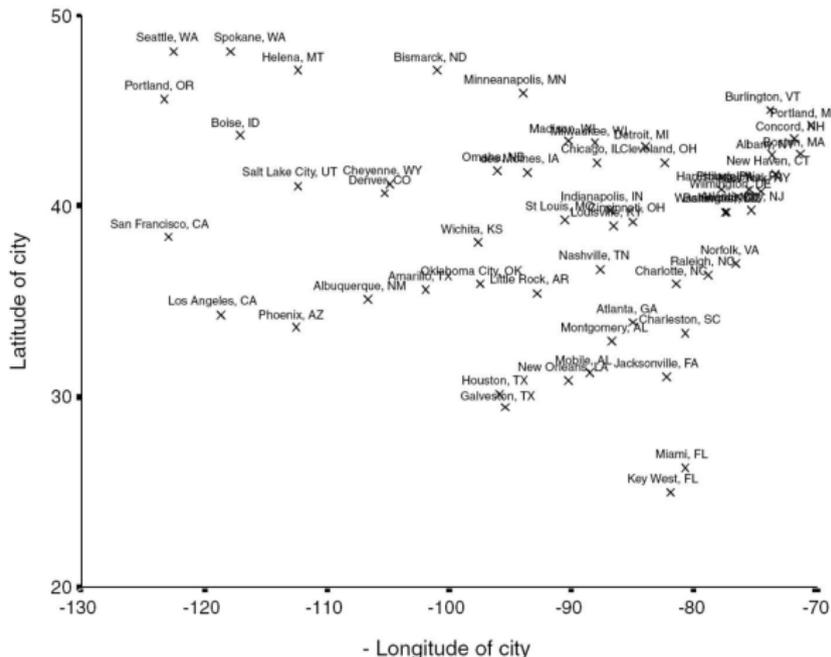
статистика:  $F(X_1^n, X_2^n) = \frac{r_{X_1, X_2}^2}{1 - r_{X_1, X_2}^2} \frac{n - M - 1}{M - 2}$ ;

$F(X_1^n, X_2^n) \sim F(M - 2, n - M - 1)$  при  $H_0$ .

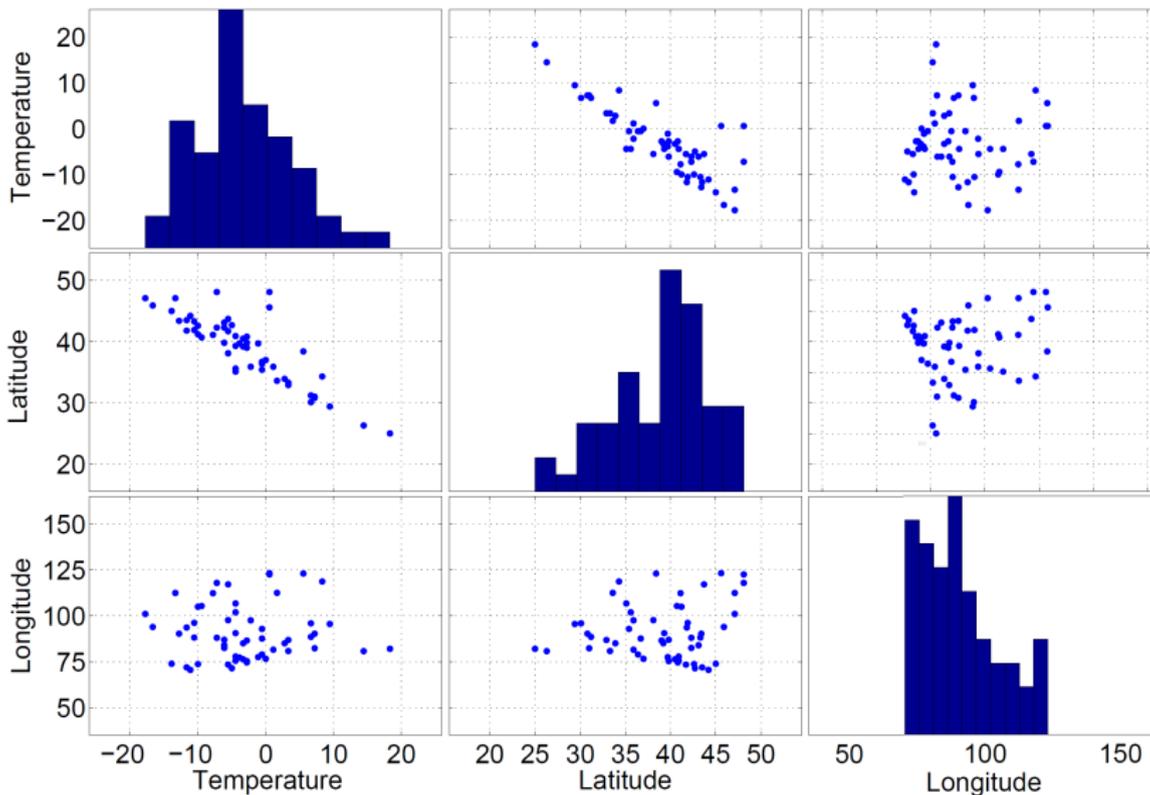


# Температура воздуха и географическое положение

По 56 городам США известны средняя минимальная температура января и географические координаты (широта, долгота). Требуется исследовать характер зависимости между переменными.



# Температура воздуха и географическое положение



# Температура воздуха и географическое положение

$T$  — температура,  $\lambda$  — долгота,  $\phi$  — широта;  
 $r$  — корреляция Пирсона,  $\rho$  — Спирмена,  $\tau$  — Кендалла.

Коэффициенты корреляции:

$r$	$T$	$\phi$	$\lambda$
$T$	—	<b>-0.848</b>	0.024
$\phi$	<b>-0.848</b>	—	0.145
$\lambda$	0.024	0.145	—

$\tau$	$T$	$\phi$	$\lambda$
$T$	—	<b>-0.683</b>	0.030
$\phi$	<b>-0.683</b>	—	-0.011
$\lambda$	0.030	-0.011	—

$\rho$	$T$	$\phi$	$\lambda$
$T$	—	<b>-0.815</b>	0.030
$\phi$	<b>-0.815</b>	—	0.023
$\lambda$	0.030	0.023	—

Достигаемые уровни значимости:

$r$	$T$	$\phi$	$\lambda$
$T$	—	<b>0.000</b>	0.861
$\phi$	<b>0.000</b>	—	0.287
$\lambda$	0.861	0.287	—

$\tau$	$T$	$\phi$	$\lambda$
$T$	—	<b>0.000</b>	0.756
$\phi$	<b>0.000</b>	—	0.910
$\lambda$	0.756	0.910	—

$\rho$	$T$	$\phi$	$\lambda$
$T$	—	<b>0.000</b>	0.829
$\phi$	<b>0.000</b>	—	0.865
$\lambda$	0.829	0.865	—

## Температура воздуха и географическое положение

$T$  — температура,  $\lambda$  — долгота,  $\phi$  — широта;  
 $r$  — частная корреляция Пирсона,  $\rho$  — Спирмена.

Коэффициенты частной корреляции:

$r$	$T$	$\phi$	$\lambda$
$T$	—	<b>-0.861</b>	<b>0.280</b>
$\phi$	<b>-0.861</b>	—	<b>0.312</b>
$\lambda$	<b>0.280</b>	<b>0.312</b>	—

$\rho$	$T$	$\phi$	$\lambda$
$T$	—	<b>-0.817</b>	0.084
$\phi$	<b>-0.817</b>	—	0.082
$\lambda$	0.084	0.082	—

Достигаемые уровни значимости:

$r$	$T$	$\phi$	$\lambda$
$T$	—	<b>0.000</b>	<b>0.039</b>
$\phi$	<b>0.000</b>	—	<b>0.021</b>
$\lambda$	<b>0.039</b>	<b>0.021</b>	—

$\rho$	$T$	$\phi$	$\lambda$
$T$	—	<b>0.000</b>	0.543
$\phi$	<b>0.000</b>	—	0.552
$\lambda$	0.543	0.552	—

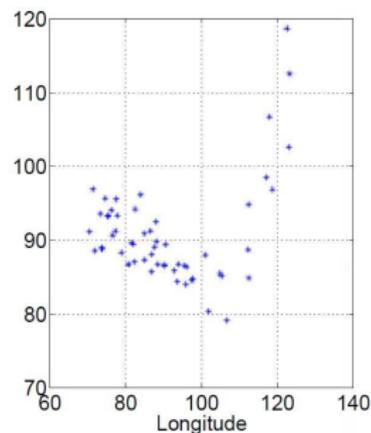
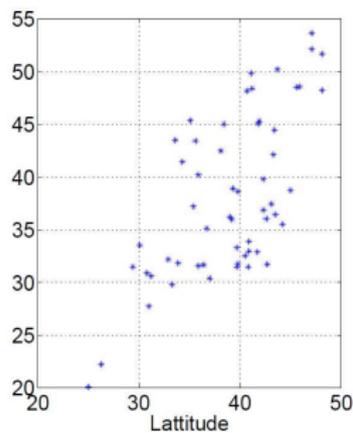
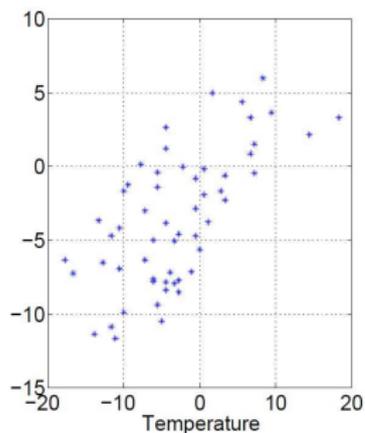
# Температура воздуха и географическое положение

$T$  — температура,  $\lambda$  — долгота,  $\phi$  — широта;

$R$  — множественная корреляция.

Коэффициенты множественной корреляции:

	$T$	$\phi$	$\lambda$
$R$	0.659	0.667	0.312
$p$	$6.0347 \times 10^{-8}$	$3.6481 \times 10^{-8}$	0.0216
with	$0.235 \cdot \lambda - 0.638 \cdot \phi$	$0.397 \cdot \lambda - 0.678 \cdot T$	$1.542 \cdot T + 2.450 \cdot \phi$

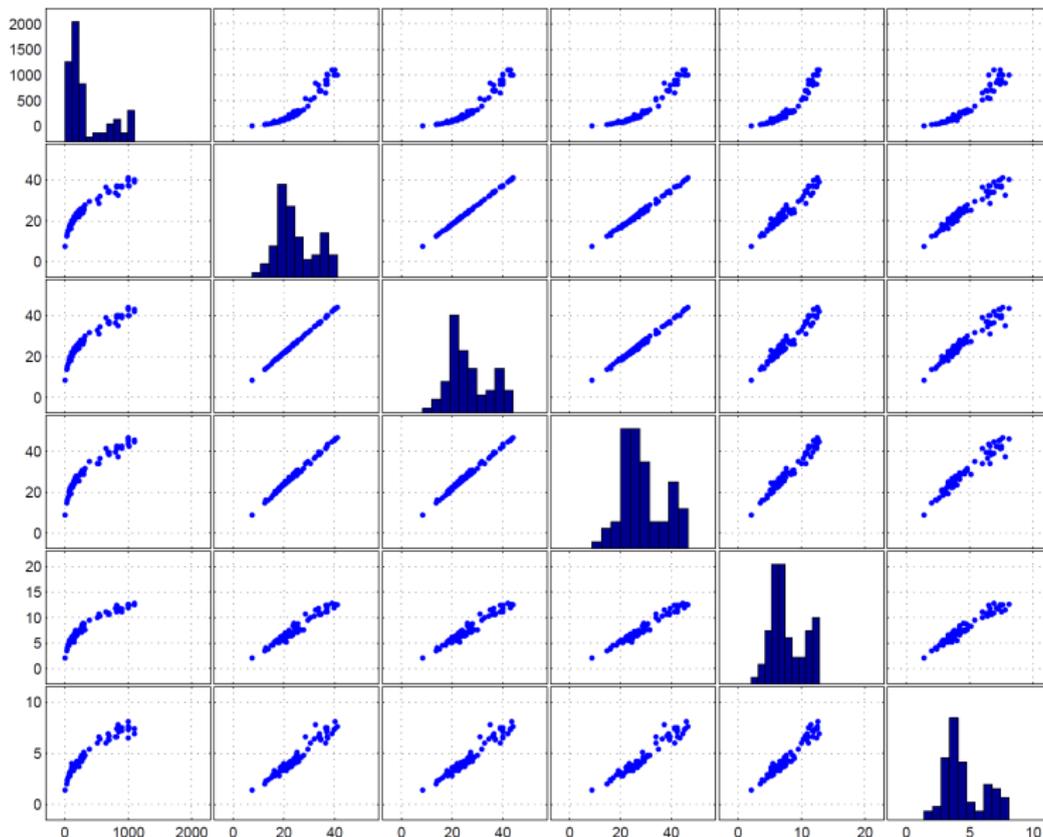


## Вес и линейные размеры рыб

В 1917 году в финском озере Längelmävesi исследователи поймали и измерили 81 рыбу трёх схожих видов. Известны: вес, длина от носа до начала хвоста, длина от носа до развилки хвоста, длина от носа до кончика хвоста, наибольшая высота, наибольшая толщина. Исследовать взаимосвязи между переменными.



## Вес и линейные размеры рыб



## Вес и линейные размеры рыб

Попарные корреляции Пирсона:

<i>r</i>	Weight	Length1	Length2	Length3	Width	Thickness
Weight	-	0.958	0.958	0.955	0.953	0.958
Length1	0.958	-	0.999	0.997	0.975	0.972
Length2	0.958	0.999	-	0.997	0.975	0.972
Length3	0.955	0.997	0.997	-	0.982	0.971
Width	0.953	0.975	0.975	0.982	-	0.973
Thickness	0.958	0.972	0.972	0.971	0.973	-

Наибольший достигаемый уровень значимости:  $p = 2.8772 \times 10^{-43}$ .

## Вес и линейные размеры рыб

Попарные корреляции Кендалла:

$\tau$	Weight	Length1	Length2	Length3	Width	Thickness
Weight	-	0.913	0.916	0.918	0.881	0.883
Length1	0.913	-	0.983	0.961	0.847	0.856
Length2	0.916	0.983	-	0.952	0.844	0.863
Length3	0.918	0.961	0.952	-	0.872	0.854
Width	0.881	0.847	0.844	0.872	-	0.822
Thickness	0.883	0.856	0.863	0.854	0.822	-

Наибольший достигаемый уровень значимости:  $p = 1.3078 \times 10^{-26}$ .

## Вес и линейные размеры рыб

Попарные корреляции Спирмена:

$\rho$	Weight	Length1	Length2	Length3	Width	Thickness
Weight	-	0.987	0.986	0.988	0.974	0.972
Length1	0.987	-	0.998	0.996	0.963	0.964
Length2	0.986	0.998	-	0.993	0.959	0.966
Length3	0.988	0.996	0.993	-	0.972	0.964
Width	0.974	0.963	0.959	0.972	-	0.944
Thickness	0.972	0.964	0.966	0.964	0.944	-

Наибольший достигаемый уровень значимости:  $p = 8.4691 \times 10^{-40}$ .

## Вес и линейные размеры рыб

Частные корреляции Пирсона:

$r$	Weight	Length1	Length2	Length3	Width	Thickness
Weight	-	0.046	0.088	-0.205	<b>0.240</b>	<b>0.237</b>
Length1	0.046	-	<b>0.888</b>	<b>0.281</b>	-0.148	0.032
Length2	0.088	<b>0.888</b>	-	0.174	-0.096	0.131
Length3	-0.205	<b>0.281</b>	0.174	-	<b>0.656</b>	<b>-0.253</b>
Width	<b>0.240</b>	-0.148	-0.096	<b>0.656</b>	-	<b>0.469</b>
Thickness	<b>0.237</b>	0.032	0.131	<b>-0.253</b>	<b>0.469</b>	-

Достигаемые уровни значимости:

$p$	Weight	Length1	Length2	Length3	Width	Thickness
Weight	-	0.697	0.447	0.073	<b>0.035</b>	<b>0.038</b>
Length1	0.693	-	<b>0.000</b>	<b>0.013</b>	0.198	0.784
Length2	0.447	<b>0.000</b>	-	0.129	0.407	0.255
Length3	0.073	<b>0.013</b>	0.129	-	<b>0.000</b>	<b>0.027</b>
Width	<b>0.035</b>	0.198	0.407	<b>0.000</b>	-	<b>0.000</b>
Thickness	<b>0.038</b>	0.784	0.255	<b>0.027</b>	<b>0.000</b>	-

## Вес и линейные размеры рыб

Частные корреляции Спирмена:

$\rho$	Weight	Length1	Length2	Length3	Width	Thickness
Weight	-	0.063	0.104	0.096	<b>0.429</b>	<b>0.394</b>
Length1	0.063	-	<b>0.852</b>	<b>0.518</b>	-0.051	-0.131
Length2	0.104	<b>0.852</b>	-	-0.094	-0.143	0.189
Length3	0.096	<b>0.518</b>	-0.094	-	<b>0.405</b>	0.033
Width	<b>0.429</b>	-0.051	-0.143	<b>0.405</b>	-	-0.017
Thickness	<b>0.394</b>	-0.131	0.189	0.033	-0.017	-

Достигаемые уровни значимости:

$p$	Weight	Length1	Length2	Length3	Width	Thickness
Weight	-	0.589	0.367	0.408	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>
Length1	0.589	-	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	0.660	0.256
Length2	0.367	<b>0.000</b>	-	0.416	0.214	0.100
Length3	0.408	<b>0.000</b>	0.416	-	<b>0.000</b>	0.777
Width	<b>0.000</b>	0.660	0.214	<b>0.000</b>	-	0.887
Thickness	<b>0.000</b>	0.256	0.100	0.777	0.887	-

## Вес и линейные размеры рыб

Множественная корреляция всех признаков с весом:  $R = 0.921$  ( $p \approx 0$ ).

Максимизирующая корреляцию линейная комбинация:  $292.25 \cdot Length1 - 151.16 \cdot Length2 - 151 \cdot Length3 + 148.89 \cdot Width + 83.43 \cdot Thickness$ .

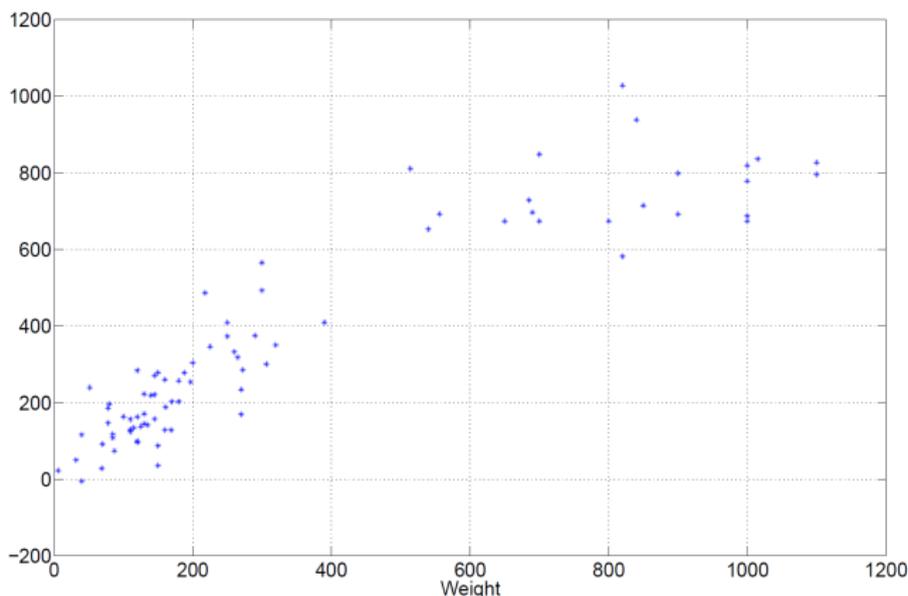


Таблица сопряжённости  $K_1 \times K_2$

Имеются связанные выборки  $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$  и  $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$ ,  
 $X_1 \in \{1, \dots, K_1\}$ ,  $X_2 \in \{1, \dots, K_2\}$ .

Таблица сопряжённости:

$X_1 \backslash X_2$	1	...	$j$	...	$K_2$	$\Sigma$
1						
⋮						
$i$			$n_{ij}$			$n_{i+}$
⋮						
$K_1$						
$\Sigma$			$n_{+j}$			$n$

## Два случайных признака

Пусть  $\pi_{ij}$  — вероятность реализации пары  $(X_1, X_2)$  в ячейке  $(i, j)$ .  
 $\{\pi_{ij}\}$  — совместное распределение  $(X_1, X_2)$ ;  
 $\{\pi_{i+}\}$ ,  $\{\pi_{+j}\}$  — маргинальные распределения.

$X_1$  и  $X_2$  независимы, если

$$\pi_{ij} = \pi_{i+}\pi_{+j} \quad \forall i = 1, \dots, K_1, j = 1, \dots, K_2.$$

## Один случайный признак

Пусть  $X_1$  — не случайная величина, а фиксированный признак. Тогда  $\{\pi_{ij}\}$  не имеет смысла, вместо него рассматриваются  $\{\pi_{1|i}, \dots, \pi_{K_1|i}\}$  — условные распределения  $X_2$  при  $X_1 = i$ .

$X_1$  и  $X_2$  независимы, если

$$\pi_{j|1} = \dots = \pi_{j|K_1} \quad \forall j = 1, \dots, K_2.$$

## Порождающие модели

- 1 Если все ячейки таблицы случайны, то распределение  $n_{ij}$  может быть, например, пуассоновским со средними  $\mu_{ij}$ ; совместная функция вероятности таблицы:

$$\prod_i \prod_j \frac{e^{-\mu_{ij}} \mu_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!}.$$

- 2 Если суммарный объём выборки  $n$  фиксирован, данные описываются мультиномиальной моделью:

$$\frac{n!}{n_{11}! \cdot \dots \cdot n_{K_1 K_2}!} \prod_i \prod_j \pi_{ij}^{n_{ij}}.$$

- 3 Если  $X_1$  не случайна, то фиксированы суммы по строкам  $n_{i+}$ , и каждая строка  $i$  порождается отдельной мультиномиальной моделью:

$$\frac{n_{i+}!}{\prod_j n_{ij}!} \prod_j \pi_{i|j}^{n_{ij}}.$$

## Порождающие модели

Исследование: как исход автомобильной аварии на заданной магистрали  $X_1$  (смертельный, несмертельный) зависит от использования ремня безопасности  $X_2$  (был использован, не был использован)?

Исход \ Ремень	использован	не использован
	смертельный	
несмертельный		

- 1 Исследователи собираются учесть все автомобильные аварии, которые произойдут на магистрали в течение года.
- 2 Исследователи запросят 200 случайных полицейских рапортов об авариях за последние годы.
- 3 Исследователи запросят 200 случайных полицейских рапортов об авариях за последние годы: 100 об авариях со смертельным исходом и 100 об авариях без смертельного исхода.

Таблица сопряжённости  $2 \times 2$ 

Пусть  $X_1$  и  $X_2$  принимают значения 0 и 1.

$X_1 \backslash X_2$	0	1	$\Sigma$
0	$a$	$b$	$a + b$
1	$c$	$d$	$c + d$
$\Sigma$	$a + c$	$b + d$	$n$

## Критерий хи-квадрат

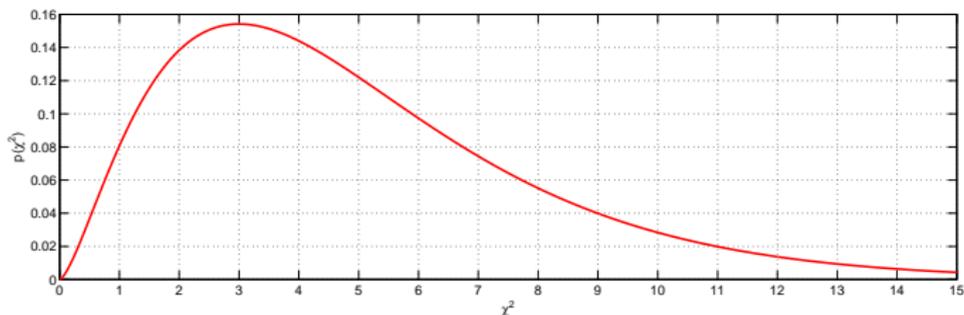
выборки:  $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$ ,  $X_1 \in \{1, \dots, K_1\}$ ,  
 $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$ ,  $X_2 \in \{1, \dots, K_2\}$ ,  
 выборки связанные;

нулевая гипотеза:  $H_0$ :  $X_1$  и  $X_2$  независимы;

альтернатива:  $H_1$ :  $H_0$  неверна;

статистика: 
$$\chi^2(X_1^n, X_2^n) = \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} \frac{(n_{ij} - \frac{n_{i+}n_{+j}}{n})^2}{\frac{n_{i+}n_{+j}}{n}} = n \left( \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} \frac{n_{ij}^2}{n_{i+}n_{+j}} - 1 \right);$$

$$\chi^2(X_1^n, X_2^n) \sim \chi^2_{(K_1-1)(K_2-1)} \text{ при } H_0.$$



Условия применимости критерия:

- $n \geq 40$ ;
- $\frac{n_{i+}n_{+j}}{n} < 5$  не более, чем в 20% ячеек.

# Критерий хи-квадрат

**Пример:** исследуется влияние препарата на некоторое заболевание. Часть испытуемых принимает препарат, часть — плацебо; по окончании курса определяется, произошло ли выздоровление.

	Выздоровели	Нет
Препарат	850	870
Плацебо	380	410

$H_0$ : препарат неотличим от плацебо.

$H_1$ : эффект препарата отличается от эффекта плацебо  $\Rightarrow p = 0.5398$ .

## G-критерий

выборки:  $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$ ,  $X_1 \in \{1, \dots, K_1\}$ ,  
 $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$ ,  $X_2 \in \{1, \dots, K_2\}$ ,

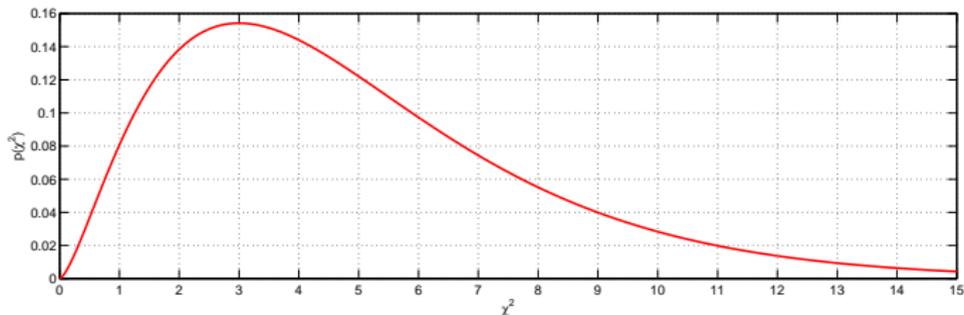
выборки связанные;

нулевая гипотеза:  $H_0$ :  $X_1$  и  $X_2$  независимы

альтернатива:  $H_1$ :  $H_0$  неверна;

статистика:  $G^2(X_1^n, X_2^n) = 2 \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} n_{ij} \ln \frac{n_{ij}n}{n_{i+}n_{+j}}$ ;

$G^2(X_1^n, X_2^n) \sim \chi^2_{(K_1-1)(K_2-1)}$  при  $H_0$ .



## Точный критерий Фишера

выборки:  $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n}), X_1 \in \{0, 1\},$   
 $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n}), X_2 \in \{0, 1\},$   
 выборки связанные;

нулевая гипотеза:  $H_0: X_1$  и  $X_2$  независимы;

альтернатива:  $H_1: H_0$  неверна.

Пусть в таблице сопряжённости суммы по строкам и столбцам фиксированы, тогда вероятность появления наблюдаемой таблицы равна

$$P(X_1^n, X_2^n) = \frac{(a+b)!(c+d)!(a+c)!(b+d)!}{a!b!c!d!n!}.$$

Достижимый уровень значимости определяется как сумма по всем возможным вариантам таблицы с такими же суммами по строкам и столбцам, имеющим вероятность не более  $P(X_1^n, X_2^n)$ .

Для односторонней альтернативы ( $ad \ll bc$ ) достигаемый уровень значимости можно определить через гипергеометрическое распределение:

$$p = \sum_{i=0}^a \frac{C_{a+b}^i C_{c+d}^{a+c-i}}{C_n^{a+c}}.$$

## Точный критерий Фишера

**Пример:** для 24 опрошенных известен пол и сидят ли они на диете. Есть ли связь между этими признаками?

	М	Ж
На диете	1	9
Не на диете	13	3

$H_0$ : связи нет.

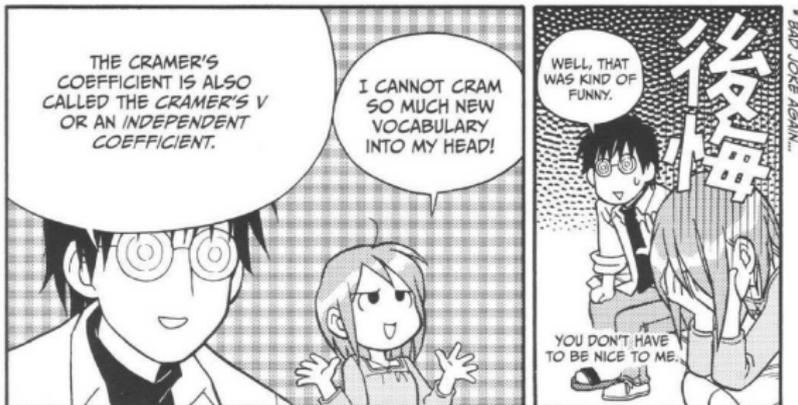
$H_1$ : признаки связаны  $\Rightarrow p = 0.0014$ .

## Коэффициент $V$ Крамера

Мера взаимосвязи между двумя категориальными переменными — коэффициент  $V$  Крамера:

$$\phi_c(X_1^n, X_2^n) = \sqrt{\frac{\chi^2(X_1^n, X_2^n)}{n(\min(K_1, K_2) - 1)}}.$$

$\phi_c(X_1^n, X_2^n) \in [0, 1]$ ; 0 соответствует полному отсутствию взаимосвязи, 1 — совпадению переменных.



## Корреляция между ординальными переменными

Мера взаимосвязи между двумя ординальными переменными — коэффициент  $\gamma$ :

$$\hat{\gamma} = \frac{p_C - p_D}{n^2 - p_t},$$

где  $p_C = \frac{C}{n}$  — частота появления согласованных пар элементов выборки, т. е., таких, что  $i_1 > i_2, j_1 > j_2$  или  $i_1 < i_2, j_1 < j_2$ ;

$p_D = \frac{D}{n}$  — частота несогласованных пар;

$p_t = \frac{T^n}{n}$  — частота таких пар, что  $i_1 = i_2$  или  $j_1 = j_2$ .

$\gamma \in [-1, 1]$ ;  $-1$  соответствует полному отсутствию согласованных пар,  $1$  — отсутствию несогласованных.

Политические взгляды	Счастье		
	Не слишком счастлив	Вполне счастлив	Очень счастлив
Либеральные	13	29	15
Умеренные	23	59	47
Консервативные	14	67	54

$\chi^2 = 7.07, p = 0.1322, \phi_c = 0.0742$ ;

$\hat{\gamma} = 0.185$ , 95% доверительный интервал —  $[0.032, 0.338]$ .

## Корреляция Мэтьюса

Мера взаимосвязи между двумя бинарными переменными — коэффициент корреляции Мэтьюса:

$$MCC = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a + b)(a + c)(b + d)(c + d)}}.$$

$MCC \in [-1, 1]$ ; 0 соответствует полному отсутствию взаимосвязи, 1 — нулям на побочной диагонали,  $-1$  — нулям на главной диагонали.

## Вторичный анализ

2008 General Social Survey, National Opinion Research center:

Highest degree	Belief in God						Total
	don't believe	no way to find out	some higher power	believe sometimes	believe but doubts	know God exists	
Less than high school	9 (10) (-0.4)	8 (15.9) (-2.2)	27 (34.2) (-1.4)	8 (12.7) (-1.5)	47 (55.3) (-1.3)	236 (206.9) (3.6)	335
High school or junior college	23 (32.5) (-2.5)	39 (51.5) (-2.6)	88 (110.6) (-3.3)	49 (41.2) (1.8)	179 (178.9) (0.0)	706 (669.4) (3.4)	1084
Bachelor or graduate	28 (17.4) (3.1)	48 (27.6) (4.7)	89 (59.3) (4.8)	19 (22.1) (-0.8)	104 (95.9) (1.1)	293 (358.8) (-6.7)	581
Total	60	95	204	76	330	1235	2000

$$\chi^2 = 76.1, p = 2.9 \times 10^{-12}, \phi_c = 0.138.$$

Стандартизированные остатки:

$$r_{ij} = \frac{n_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{\hat{\mu}_{ij} \left(1 - \frac{n_{i+}}{n}\right) \left(1 - \frac{n_{+j}}{n}\right)}}, \quad \hat{\mu}_{ij} = \frac{n_{i+} n_{+j}}{n}.$$

## Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

Эксперимент: пациенты принимают препарат или плацебо, по окончании курса определяется, выздоровели они или нет.

Есть ли связь между выздоровлением и приёмом препарата?

Мужчины	Выздоровели	Нет
Препарат	700	800
Плацебо	80	130

Женщины	Выздоровели	Нет
Препарат	150	70
Плацебо	300	280

Для мужчин:  $\chi^2 = 5.456$ ,  $p = 0.0195$ .

Для женщин:  $\chi^2 = 17.555$ ,  $p = 2.7914 \times 10^{-5}$ .

М+Ж	Выздоровели	Нет
Препарат	850	870
Плацебо	380	410

Суммарно:  $\chi^2 = 0.376$ ,  $p = 0.5398$ .

## Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

Причины несогласованности выводов — большие отличия в размерах групп пациентов, принимающих плацебо и препарат: основной вклад в выводы вносят женщины, принимавшие плацебо, и мужчины, принимавшие препарат.

Чтобы такого не происходило, плацебо и препарат должны поровну распределяться по всем анализируемым подгруппам.

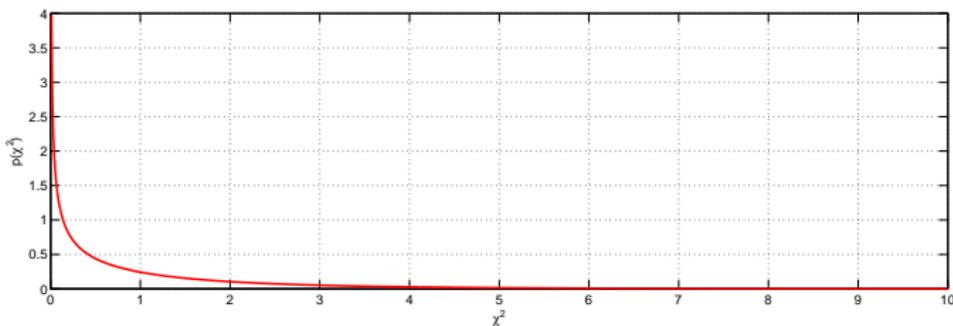
# Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

Bikel at el., Sex Bias in Graduate Admissions: Data from Berkeley, 1975.  
 В 1973 году на университет Беркли, Калифорния, подали в суд: доля поступивших абитуриентов мужского пола была выше, чем доля поступивших женского пола.

	Не поступили	Поступили	Доля поступивших
Мужчины	4704	3738	44.3%
Женщины	2827	1494	34.6%



## Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

Критерий хи-квадрат:  $\chi^2 = 108.1$ ,  $p \approx 0$ .

	Наблюдаемые		Ожидаемые		Разности	
	-	+	-	+	-	+
Мужчины	4704	3738	4981.3	3460.7	-227.3	227.3
Женщины	2827	1494	2549.7	1771.3	227.3	-227.3

## Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

Будем искать виноватых: посмотрим детализированную статистику по 85 факультетам.

Значимо (при  $\alpha = 0.05$ ) меньше женщин прошли отбор на 4 факультета, суммарный дефицит по ним — 26.

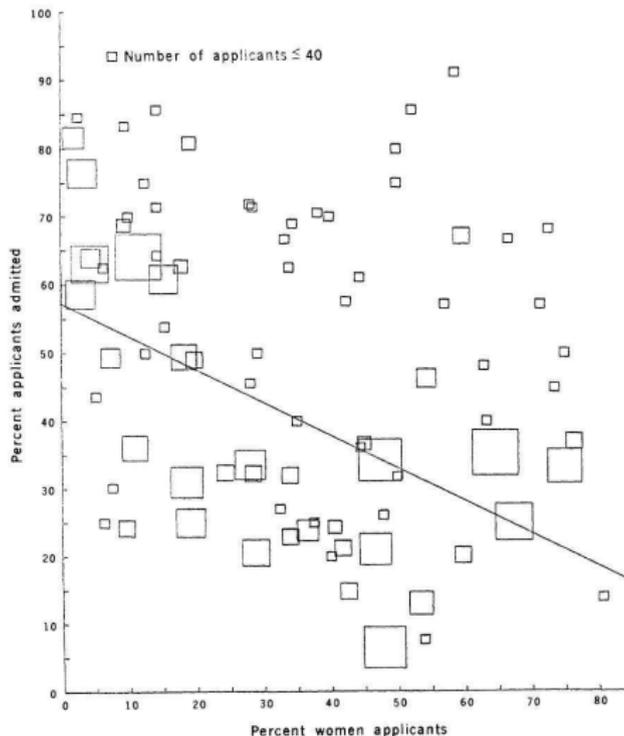
На 6 факультетов поступило значимо меньше мужчин, суммарный дефицит — 64.

Данные по 6 крупнейшим факультетам:

	Мужчины		Женщины	
	$\Sigma$	+	$\Sigma$	+
1	825	62%	108	<b>82%</b>
2	560	63%	25	<b>68%</b>
3	325	<b>37%</b>	593	34%
4	417	33%	375	<b>35%</b>
5	191	<b>28%</b>	393	24%
6	272	6%	341	<b>7%</b>

# Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

Ответ: женщины чаще пытались поступить на факультеты с большим конкурсом.



## Литература

- непрерывные признаки — Лагутин, глава 20;
- категориальные признаки — Agresti, главы 2 и 3;
- работа с таблицами сопряжённости в R — пакет vcd, <http://cran.r-project.org/web/packages/vcdExtra/vignettes/vcd-tutorial.pdf>;
- значимость корреляции Пирсона — Kanji, №12, Good, 3.8;
- значимость корреляции Кендалла и Спирмена — Кобзарь, 5.2.2.2.1, 5.2.2.2.2;
- значимость частной и множественной корреляций — Кобзарь, 5.2.1.3.

Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика*. — М.: Физматлит, 2006.  
Лагутин М.Б. *Наглядная математическая статистика*. — Москва: Бинном, 2007.  
Agresti A. *Categorical Data Analysis*. — Hoboken: Wiley, 2002.  
Good P. *Permutation, Parametric and Bootstrap Tests of Hypotheses: A Practical Guide to Resampling Methods for Testing Hypotheses*. — New York: Springer, 2005.  
Kanji G.K. *100 statistical tests*. — London: SAGE Publications, 2006.