

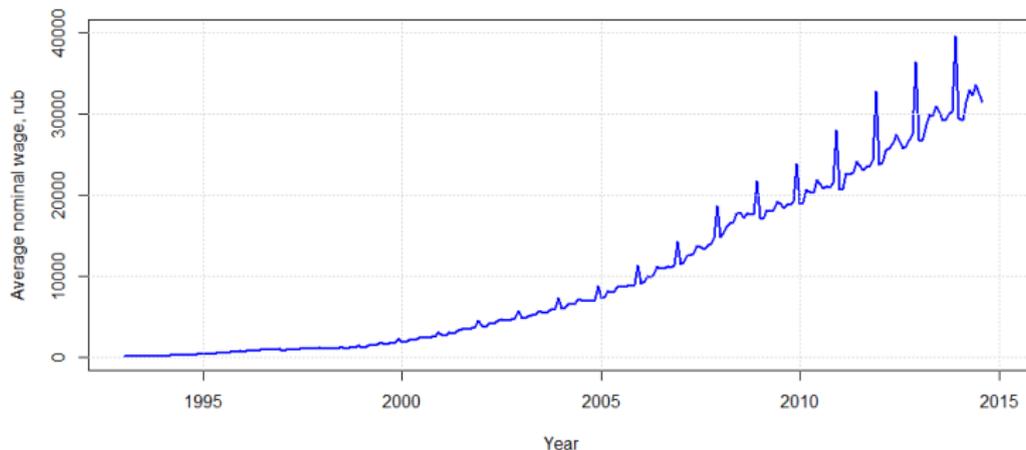
Прикладной статистический анализ данных.
9. Анализ временных рядов, часть первая.

Рябенко Евгений
riabenko.e@gmail.com

I/2015

Прогнозирование временного ряда

Временной ряд: $y_1, \dots, y_T, \dots, y_t \in \mathbb{R}$, — значения признака, измеренные через постоянные временные интервалы.



Задача прогнозирования — найти функцию f_T :

$$y_{T+d} \approx f_T(y_T, \dots, y_1, d) \equiv \hat{y}_{T+d|T},$$

где $d \in \{1, \dots, D\}$ — отсрочка прогноза, D — горизонт прогнозирования.

Компоненты временных рядов

Тренд — плавное долгосрочное изменение уровня ряда.

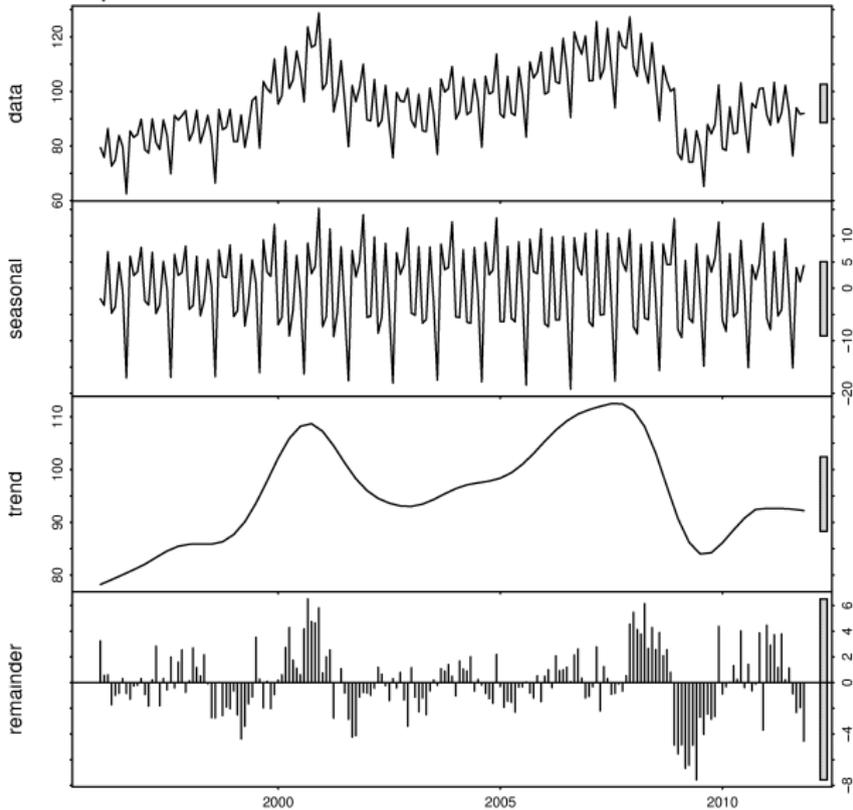
Сезонность — циклические изменения уровня ряда с постоянным периодом.

Цикл — изменения уровня ряда с переменным периодом (цикл жизни товара, экономические волны, периоды солнечной активности).

Ошибка — непрогнозируемая случайная компонента ряда.

Компоненты временных рядов

STL-декомпозиция:



Автокорреляционная функция (ACF)

Автокорреляция:

$$r_\tau = r_{y_t y_{t+\tau}} = \frac{\sum_{t=1}^{T-\tau} (y_t - \bar{y})(y_{t+\tau} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}, \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t.$$

$r_\tau \in [-1, 1]$, τ — лаг автокорреляции.

Проверка значимости отличия автокорреляции от нуля:

временной ряд: $Y^T = Y_1, \dots, Y_T$;

нулевая гипотеза: $H_0: r_\tau = 0$;

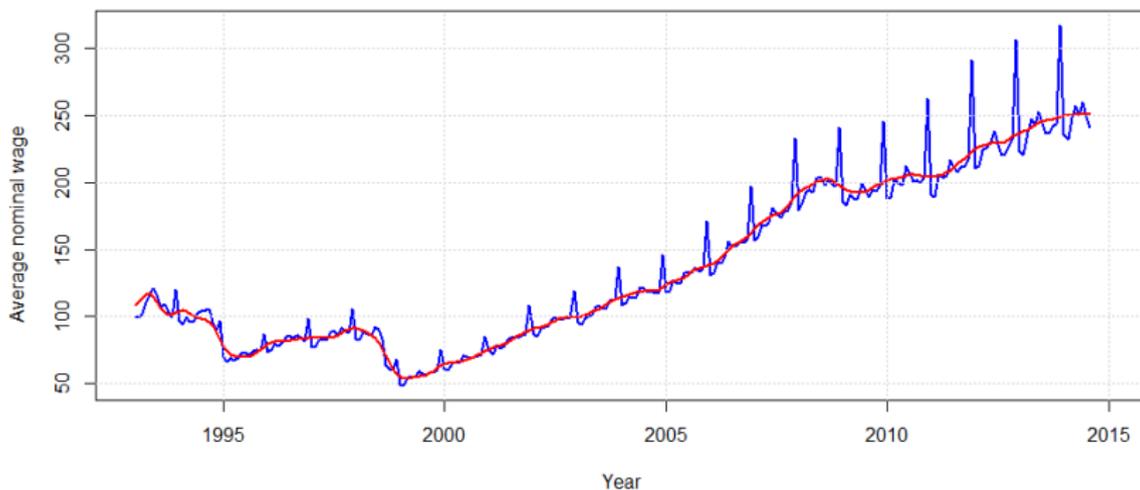
альтернатива: $H_1: r_\tau \neq 0$;

статистика: $T(Y^T) = \frac{r_\tau \sqrt{T-\tau-2}}{\sqrt{1-r_\tau^2}}$;

$T(Y^T) \sim St(T - \tau - 2)$ при H_0 .

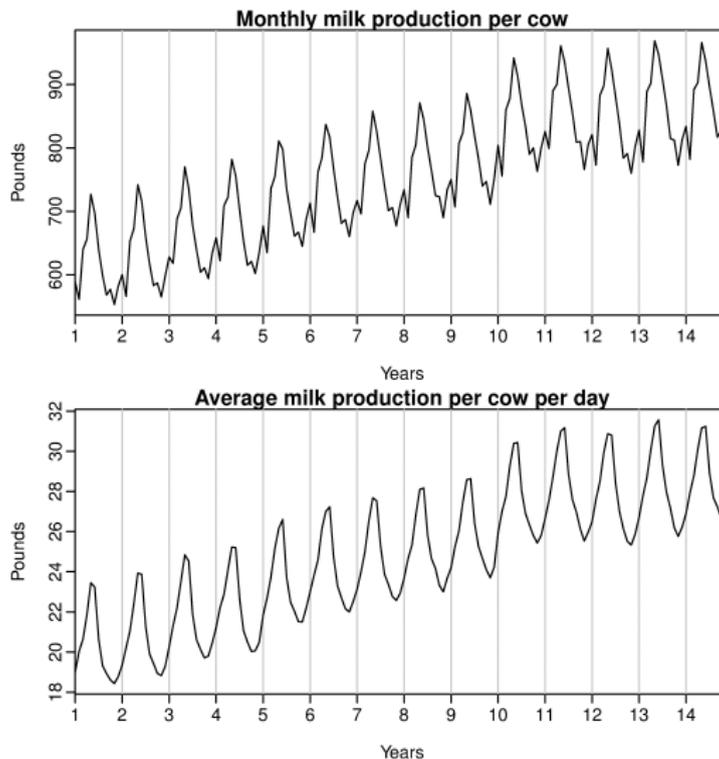
Снятие сезонности

Часто для удобства интерпретации ряда сезонная компонента вычитается:



Календарные эффекты

Иногда упростить структуру временного ряда можно за счёт учёта неравномерности отсчётов:



О пользе предсказательных интервалов

Пример: в апреле 1997 года в Гранд-Форкс, Северная Дакота, произошло наводнение. Город был защищён дамбой высотой в 51 фут; согласно прогнозу, высота весеннего паводка должна была составить 49 футов; истинная высота паводка оказалась равной 54 футам.

50000 жителей было эвакуировано, 75% зданий повреждено или уничтожено, ущерб составил несколько миллиардов долларов.

На исторических данных точность прогнозов метеорологической службы составляла ± 9 футов.

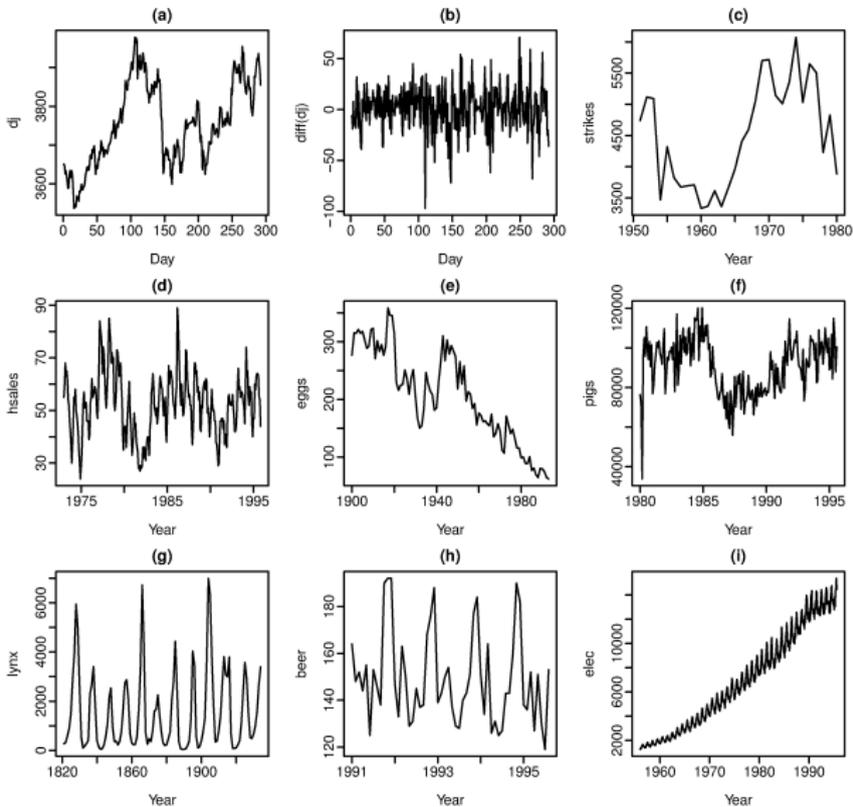
Стационарность

Ряд y_1, \dots, y_T **стационарен**, если $\forall s$ распределение y_t, \dots, y_{t+s} не зависит от t , т. е. его свойства не зависят от времени.

Ряды с трендом или сезонностью нестационарны.

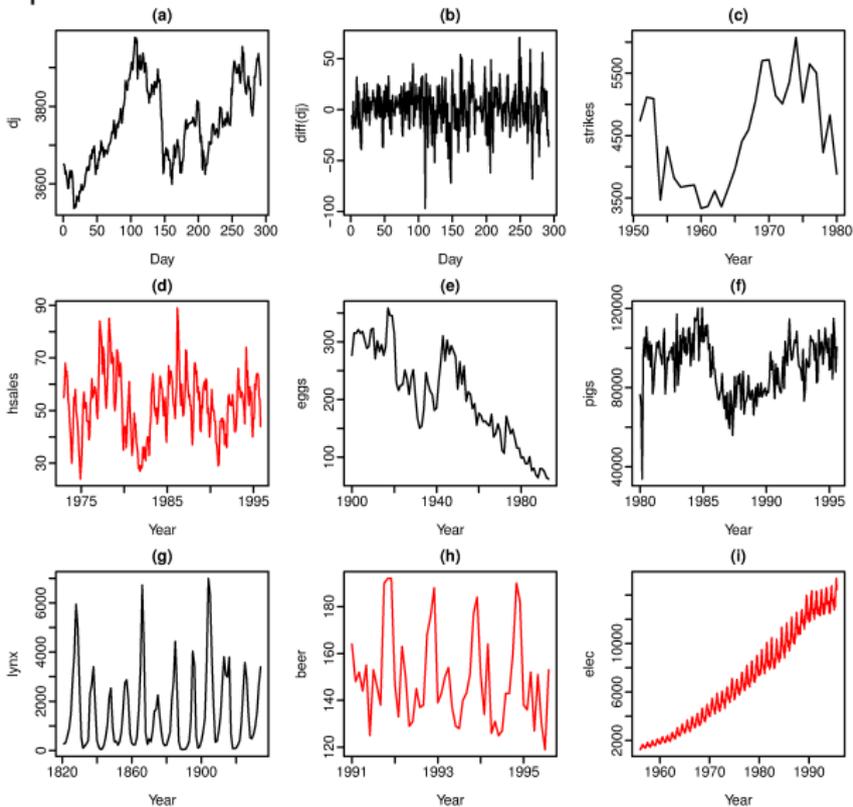
Ряды с непериодическими циклами стационарны, поскольку нельзя предсказать заранее, где будут находиться максимумы и минимумы.

Стационарность



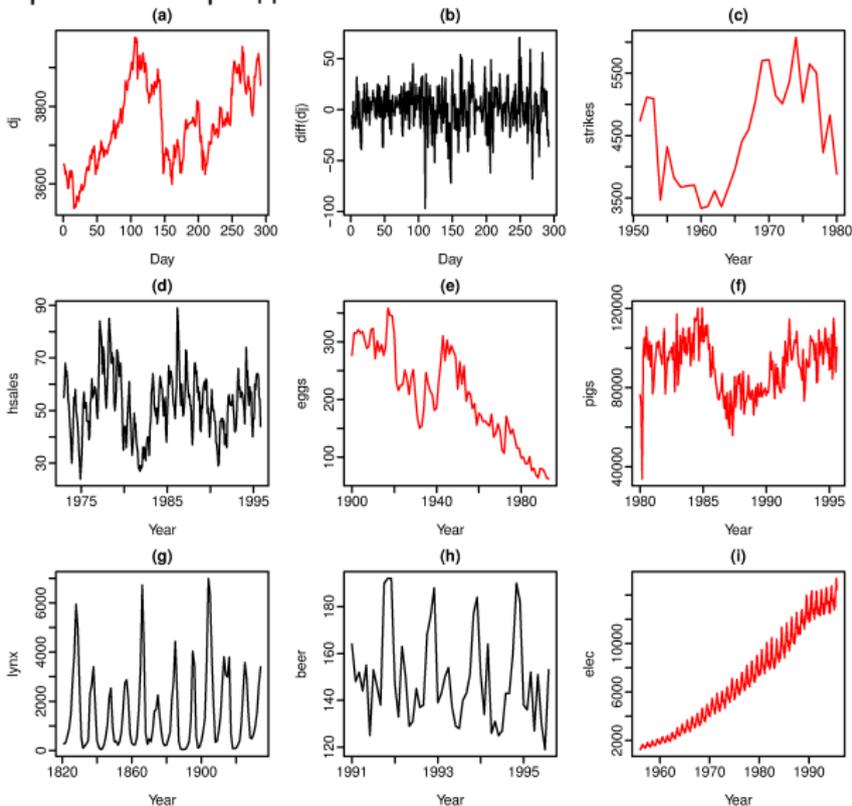
Стационарность

Нестационарны из-за сезонности:



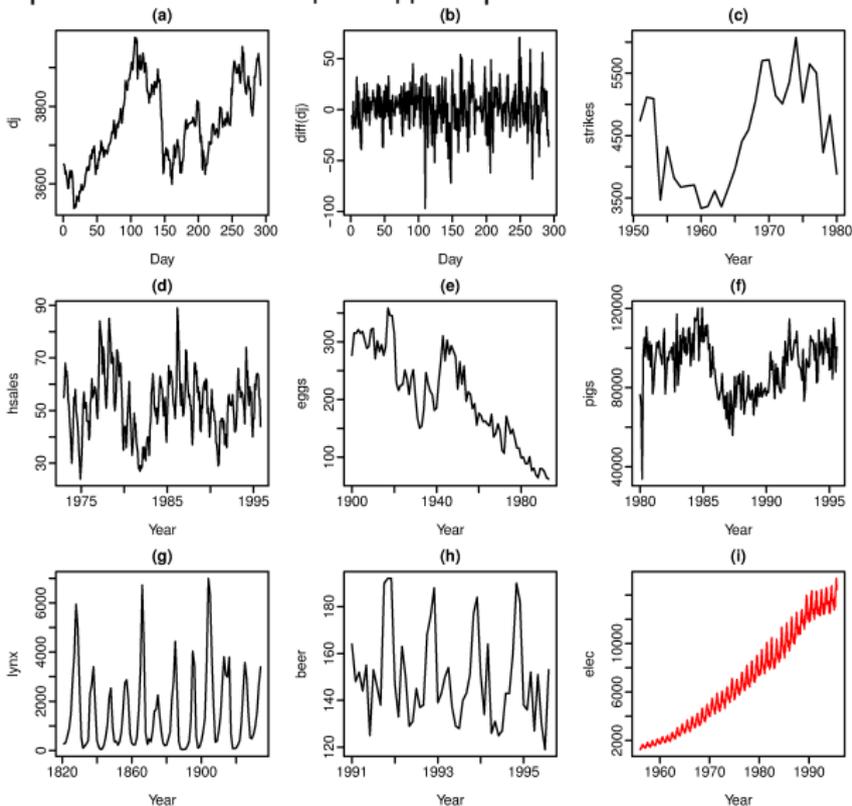
Стационарность

Нестационарны из-за тренда:



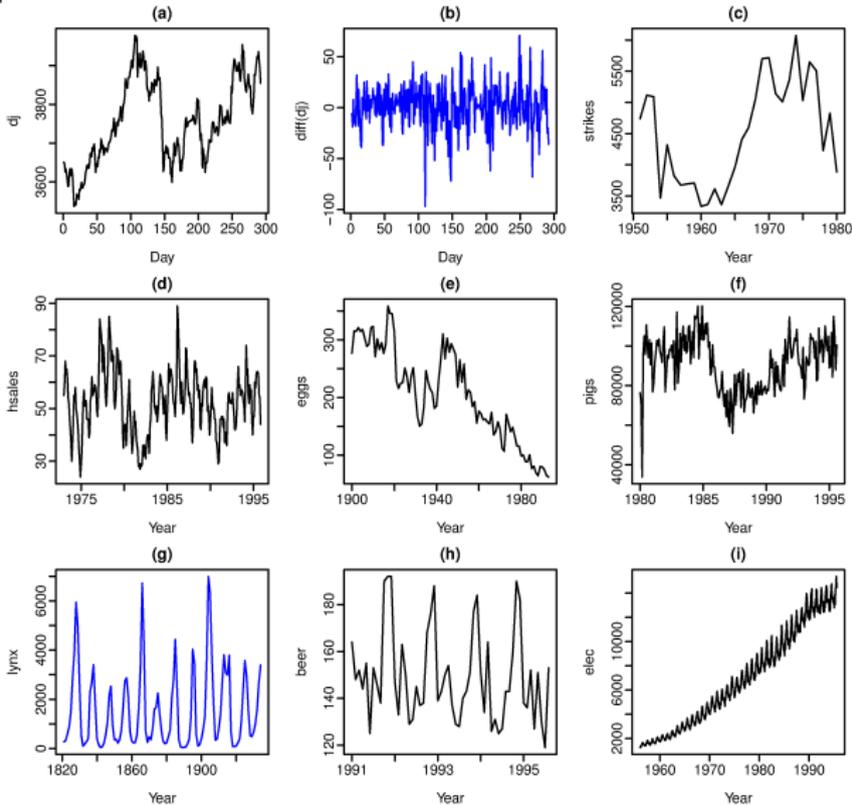
Стационарность

Нестационарны из-за меняющейся дисперсии:



Стационарность

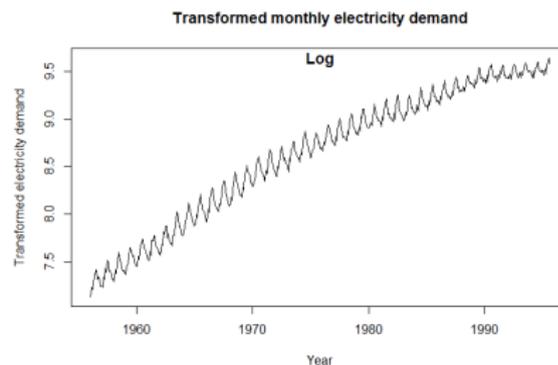
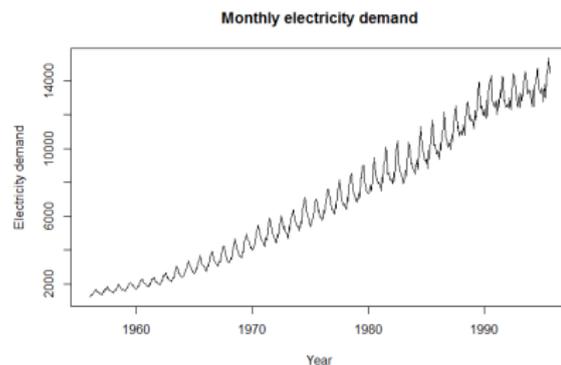
Стационарны:



Стабилизация дисперсии

Для рядов с монотонно меняющейся дисперсией можно использовать стабилизирующие преобразования.

Часто используют логарифмирование:

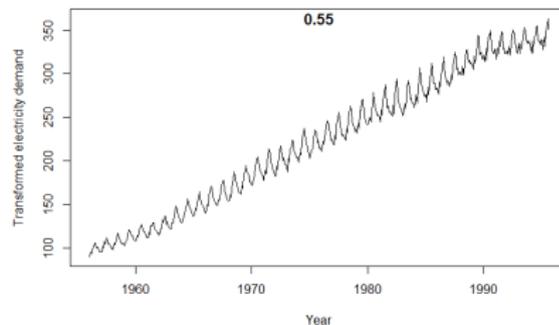
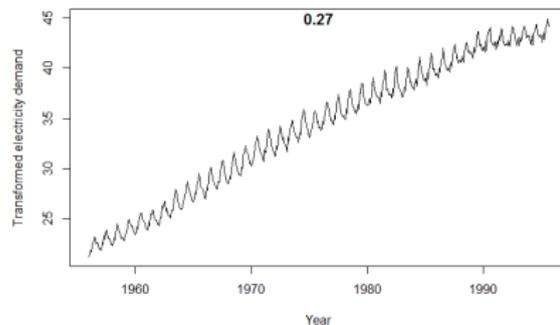


Преобразования Бокса-Кокса

Параметрическое семейство стабилизирующих дисперсию преобразований:

$$y'_t = \begin{cases} \ln y_t, & \lambda = 0, \\ (y_t^\lambda - 1) / \lambda, & \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Параметр λ выбирается так, чтобы минимизировать дисперсию или максимизировать правдоподобие модели.



Преобразования Бокса-Кокса

После построения прогноза для трансформированного ряда его нужно преобразовать в прогноз исходного:

$$\hat{y}_t = \begin{cases} \exp(\hat{y}'_t), & \lambda = 0, \\ (\lambda \hat{y}'_t + 1)^{1/\lambda}, & \lambda \neq 0. \end{cases}$$

- Если некоторые $y_t \leq 0$, преобразования Бокса-Кокса невозможны (нужно прибавить к ряду константу).
- Часто оказывается, что преобразование вообще не нужно.
- Стоит округлять значение λ , чтобы упростить интерпретацию.
- Как правило, стабилизирующее преобразование слабо влияет на прогноз и сильно — на предсказательный интервал.

Дифференцирование

Дифференцирование ряда — переход к попарным разностям его соседних значений:

$$y_1, \dots, y_T \longrightarrow y'_2, \dots, y'_T,$$

$$y'_t = y_t - y_{t-1}.$$

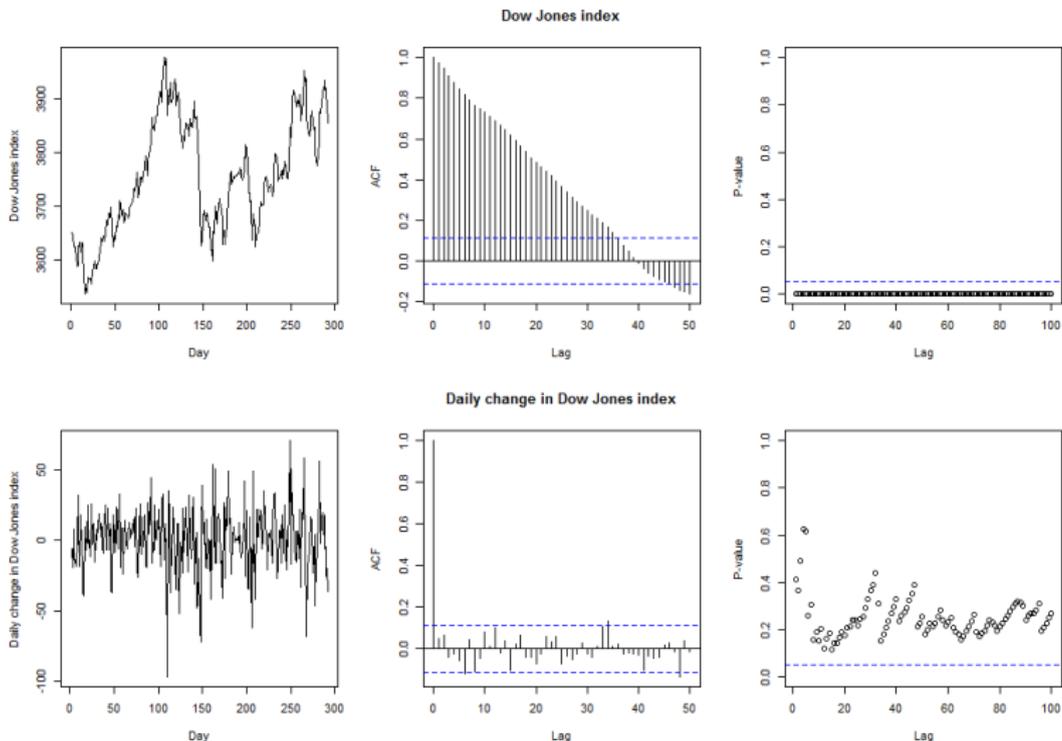
Дифференцированием можно стабилизировать среднее значение ряда и избавиться от тренда и сезонности.

Может применяться неоднократное дифференцирование; например, для второго порядка:

$$y_1, \dots, y_T \longrightarrow y'_2, \dots, y'_T \longrightarrow y''_3, \dots, y''_T,$$

$$y''_t = y'_t - y'_{t-1} = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}.$$

Дифференцирование



Критерий KPSS: для исходного ряда $p < 0.01$, для ряда первых разностей — $p > 0.1$.

Сезонное дифференцирование

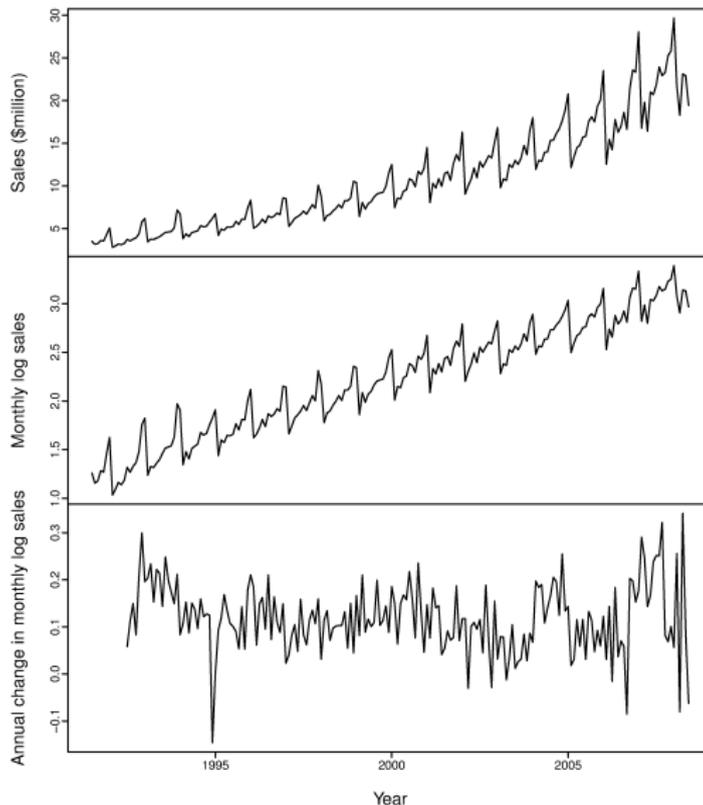
Сезонное дифференцирование ряда — переход к попарным разностям его значений в соседних сезонах:

$$y_1, \dots, y_T \longrightarrow y'_{s+1}, \dots, y'_T,$$

$$y'_t = y_t - y_{t-s}.$$

Сезонное дифференцирование

Antidiabetic drug sales



Критерий KPSS:
 для исходного ряда $p < 0.01$,
 для логарифмированного ряда $p < 0.01$,
 после сезонного дифференцирования $p > 0.1$.

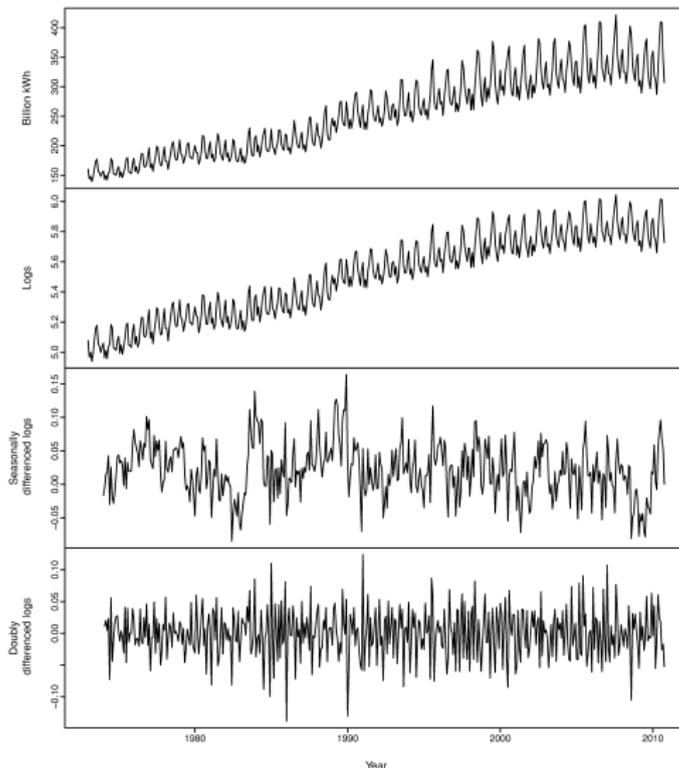
Комбинированное дифференцирование

Сезонное и обычное дифференцирование может применяться к одному ряду в любом порядке.

Если ряд имеет выраженный сезонный профиль, рекомендуется начинать с сезонного дифференцирования — после него ряд уже может оказаться стационарным.

Комбинированное дифференцирование

Monthly US net electricity generation



Критерий

KPSS: для исходного ряда $p < 0.01$, для логарифмированного — $p < 0.01$, после сезонного дифференцирования — $p = 0.0355$, после ещё одного дифференцирования — $p > 0.1$.

Остатки

Остатки — разность между фактом и прогнозом:

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t.$$

Прогнозы \hat{y}_t могут быть построены с фиксированной отсрочкой:

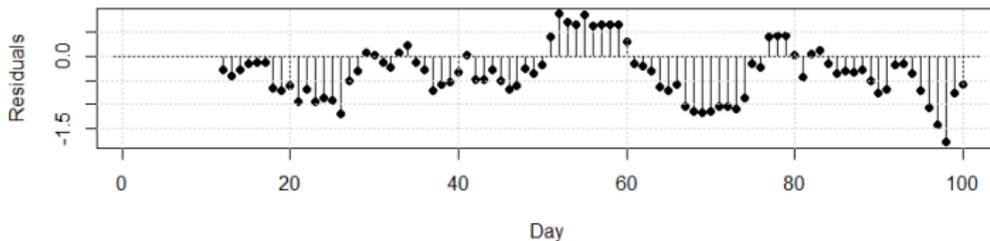
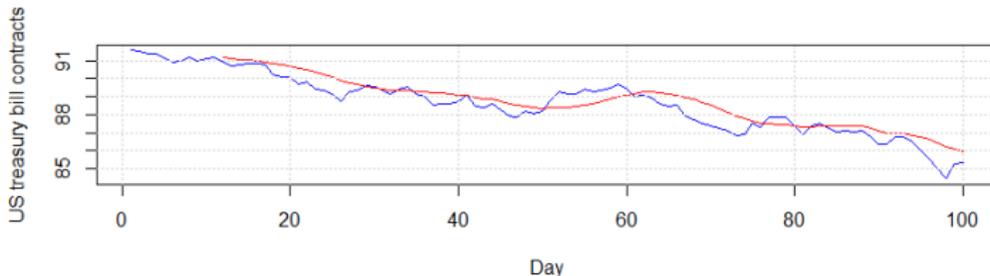
$$\hat{y}_{R+d|R}, \dots, \hat{y}_{T|T-d},$$

или с фиксированным концом истории при разных отсрочках:

$$\hat{y}_{T-D+1|T-D}, \dots, \hat{y}_{T|T-D}.$$

Необходимые свойства остатков прогноза

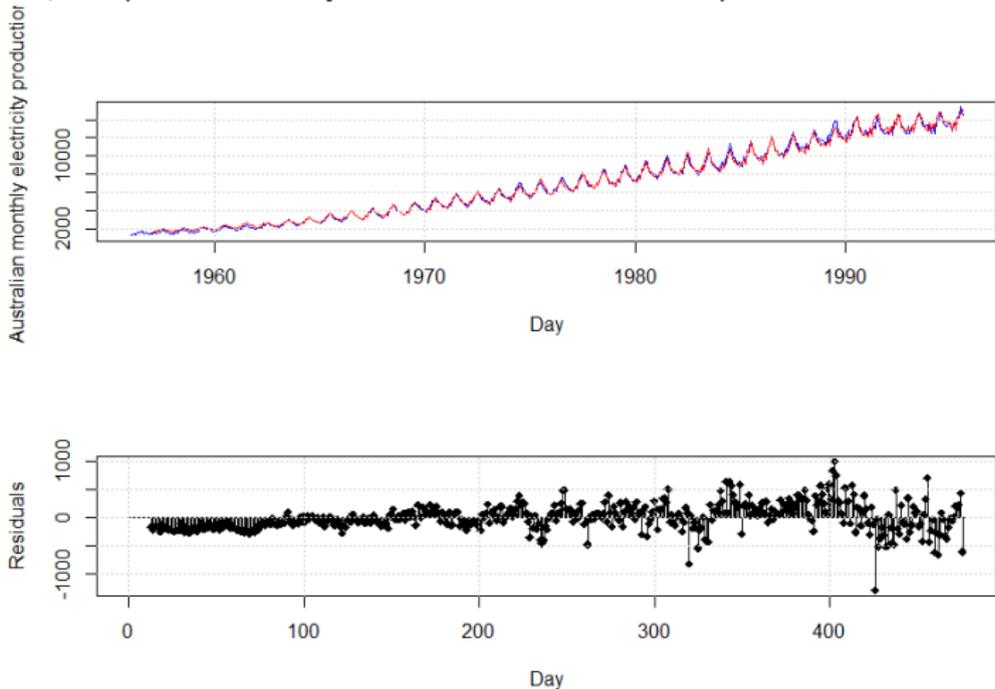
- Несмещённость — равенство среднего значения нулю:



Прогноз средним за последний год отстаёт от ряда.

Необходимые свойства остатков прогноза

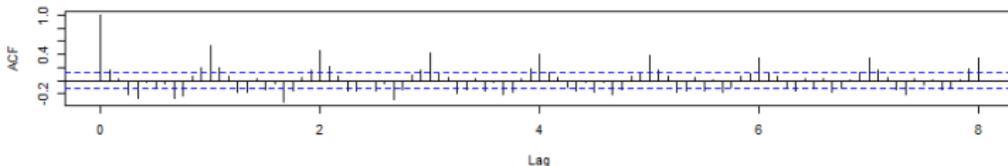
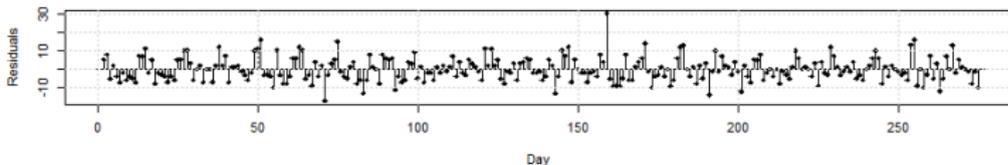
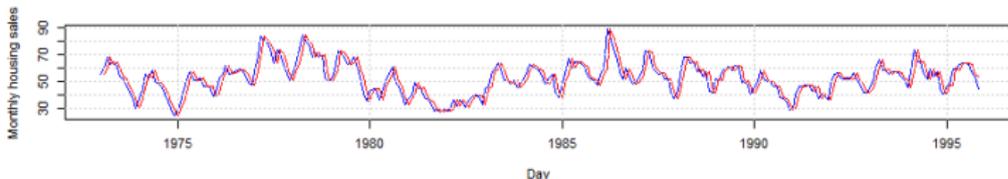
- Стационарность — отсутствие зависимости от времени:



Корректировка среднего у наивного сезонного прогноза приводит к занижению прогнозных значений в начале периода и завышению в

Необходимые свойства остатков прогноза

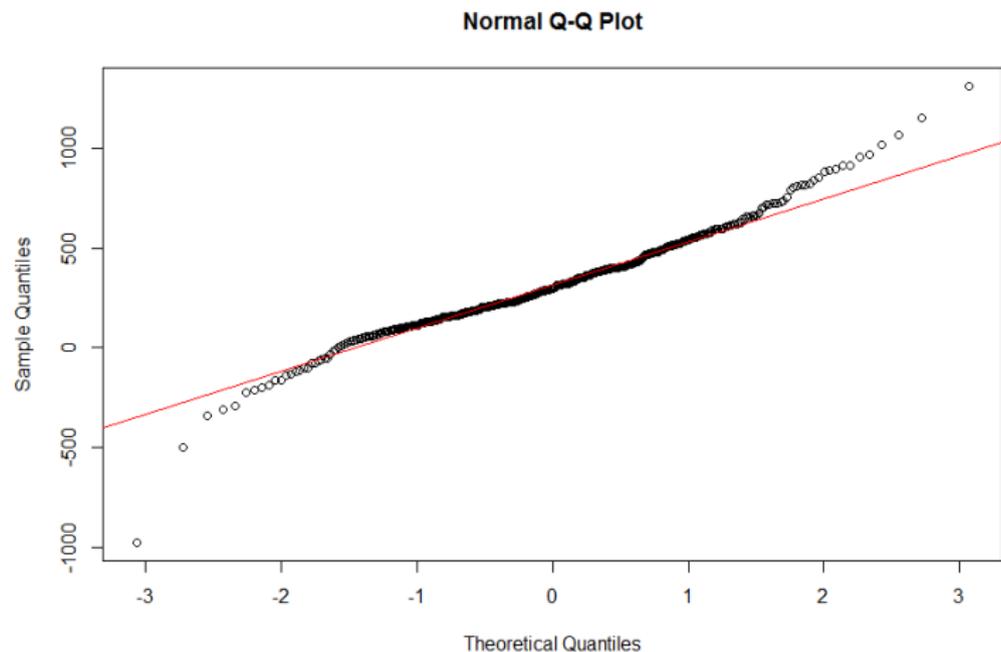
- Неавтокоррелированность — отсутствие неучтённой зависимости от предыдущих наблюдений:



Наивный прогноз не учитывает сезонность.

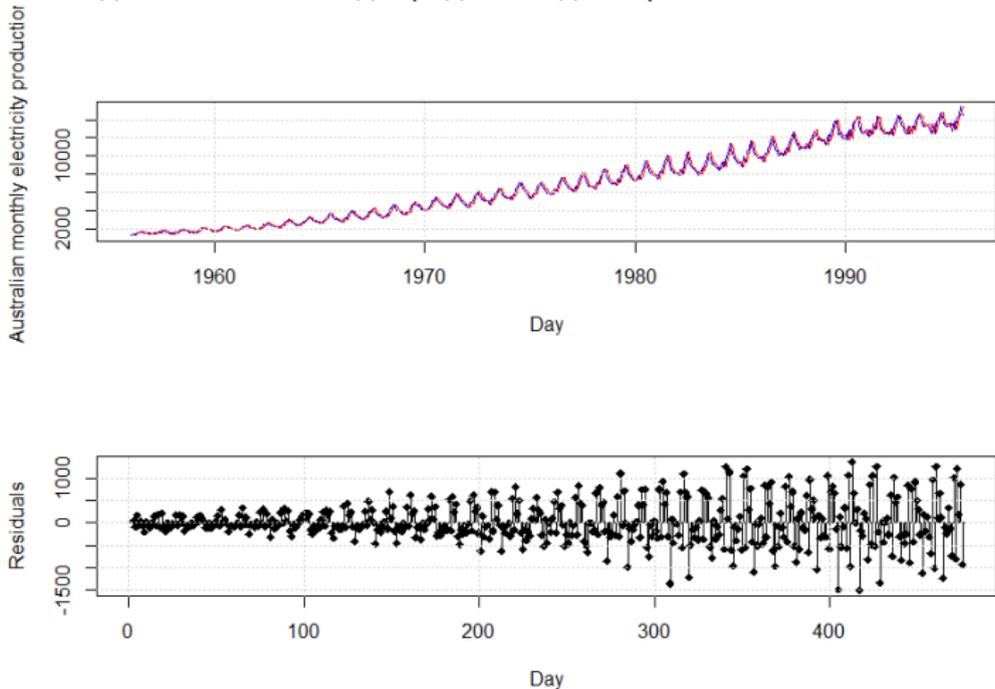
Желательные свойства остатков прогноза

- Нормальность:



Желательные свойства остатков прогноза

- Гомоскедастичность — однородность дисперсии:



Дисперсия остатков прогноза с экстраполяцией тренда возрастает со временем.

Проверка свойств остатков

- Несмещённость — критерий Стьюдента или Уилкоксона.
- Стационарность — визуальный анализ, критерий KPSS.
- Неавтокоррелированность — коррелограмма, Q-критерий Льюнга-Бокса.

- Нормальность — q-q plot, критерий Шапиро-Уилка.
- Гомоскедастичность — визуальный анализ, критерий Бройша-Пагана.

Критерий KPSS (Kwiatkowski-Philips-Schmidt-Shin)

ряд ошибок прогноза: $\varepsilon^T = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T$;

нулевая гипотеза: H_0 : ряд ε^T стационарен;

альтернатива: H_1 : ряд ε^T описывается моделью

вида $\varepsilon_t = \alpha\varepsilon_{t-1}$;

статистика: $KPSS(\varepsilon^T) = \frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^T \left(\sum_{t=1}^i \varepsilon_t \right)^2 / \lambda^2$;

$KPSS(\varepsilon^T)$ при H_0 имеет табличное распределение.

Q-критерий Льюнга-Бокса

ряд ошибок прогноза: $\varepsilon^T = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T$;

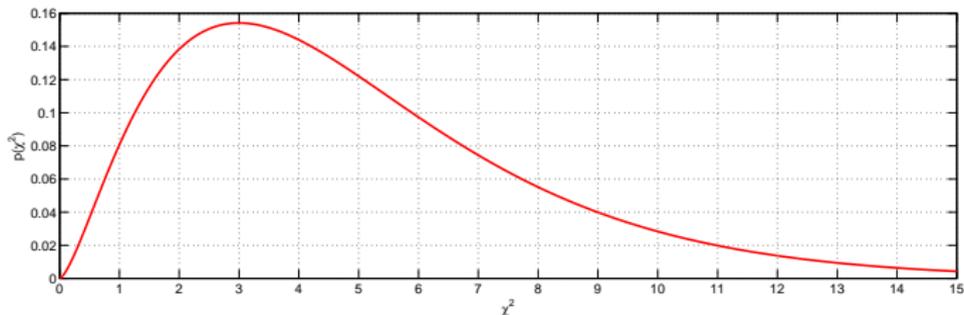
нулевая гипотеза: $H_0: r_1 = \dots = r_L = 0$;

альтернатива: $H_1: H_0$ неверна;

статистика: $Q(\varepsilon^T) = T(T+2) \sum_{\tau=1}^L \frac{r_\tau^2}{T-\tau}$;

$Q(\varepsilon^T) \sim \chi_{L-K}^2$ при H_0 ,

K — число настраиваемых параметров модели ряда.



Авторегрессия

$$AR(p): \quad y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

где y_t — стационарный ряд с нулевым средним, ϕ_1, \dots, ϕ_p — константы ($\phi_p \neq 0$), ε_t — гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией σ_ε^2 .

Если среднее равно μ , модель принимает вид

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

где $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$.

Другой способ записи:

$$\phi(B)y_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)y_t = \varepsilon_t,$$

где B — разностный оператор ($By_t = y_{t-1}$).

Линейная комбинация p подряд идущих членов ряда даёт белый шум.

Авторегрессия

Чтобы ряд $AR(p)$ был стационарным, должны выполняться ограничения на коэффициенты. Например,

- в $AR(1)$ необходимо $-1 < \phi_1 < 1$;
- в $AR(2)$ необходимо $-1 < \phi_2 < 1$, $\phi_1 + \phi_2 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$.

С ростом p вид ограничений усложняется.

Скольльзящее среднее

$$MA(q): y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

где y_t — стационарный ряд с нулевым средним, $\theta_1, \dots, \theta_q$ — константы ($\theta_q \neq 0$), ε_t — гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией σ_ε^2 .

Если среднее равно μ , модель принимает вид

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

Другой способ записи:

$$y_t = \theta(B) \varepsilon_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q) \varepsilon_t,$$

где B — разностный оператор.

Линейная комбинация q подряд идущих компонент белого шума ε_t даёт элемент ряда.

Скользящее среднее

Чтобы ряд модель $MA(q)$ была обратимой, должны выполняться ограничения на коэффициенты. Например,

- в $MA(1)$ необходимо $-1 < \theta_1 < 1$;
- в $MA(2)$ необходимо $-1 < \theta_2 < 1$, $\theta_1 + \theta_2 > -1$, $\theta_1 - \theta_2 < 1$.

С ростом q вид ограничений усложняется.

ARMA (Autogressive moving average)

$$ARMA(p, q): y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

где y_t — стационарный ряд с нулевым средним, $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$ — константы ($\phi_p \neq 0, \theta_q \neq 0$), ε_t — гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией σ_ε^2 .

Если среднее равно μ , модель принимает вид

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

где $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$.

Другой способ записи:

$$\phi(B) y_t = \theta(B) \varepsilon_t.$$

Согласно теорема Вольда, любой стационарный ряд может быть аппроксимирован моделью ARMA(p,q) с любой точностью.

ARIMA (Autogерressive integrated moving average)

Ряд описывается моделью $ARIMA(p, d, q)$, если ряд его разностей

$$\nabla^d y_t = (1 - B)^d y_t$$

описывается моделью $ARMA(p, q)$.

$$\phi(B) \nabla^d y_t = \theta(B) \varepsilon_t.$$

Частичная автокорреляционная функция (PACF)

Частичная автокорреляция стационарного ряда y_t :

$$\phi_{hh} = \begin{cases} r(y_{t+1}, y_t), & h = 1, \\ r(y_{t+h} - y_{t+h}^{h-1}, y_t - y_t^{h-1}), & h \geq 2, \end{cases}$$

где y_t^{h-1} — регрессия y_t на $y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+h-1}$:

$$y_t^{h-1} = \beta_1 y_{t+1} + \beta_2 y_{t+2} + \dots + \beta_{h-1} y_{t+h-1},$$

$$y_{t+h}^{h-1} = \beta_1 y_{t+h-1} + \beta_2 y_{t+h-2} + \dots + \beta_{h-1} y_{t+1}.$$

Оценка параметров модели

- При заданных p, d, q коэффициенты модели оцениваются методом максимального правдоподобия; функционал качества — логарифм правдоподобия L .
- d выбирается так, чтобы ряд был стационарным.
- p и q нельзя выбирать из принципа максимума правдоподобия: L всегда увеличивается с ростом p и q .
- При выборе p и q погут помочь автокорреляционные функции ACF и PACF:
 - в модели $ARIMA(p, d, 0)$ ACF экспоненциально затухает или имеет синусоидальный вид, а PACF значимо отличается от нуля при лаге p ;
 - в модели $ARIMA(0, d, q)$ PACF экспоненциально затухает или имеет синусоидальный вид, а ACF значимо отличается от нуля при лаге q .

Информационные критерии

AIC:

$$AIC = -2L + 2(p + q + k + 1),$$

где $k = 1$ при $c \neq 0$ и $k = 0$ при $c = 0$;

AIC_c:

$$AIC_c = -2L + \frac{2(p + q + k + 1)(p + q + k + 2)}{T - p - q - k - 2};$$

BIC (SIC):

$$BIC = -2L + (\log T - 2)(p + q + k + 1).$$

Прогнозирование с помощью ARIMA

- 1 Строится график ряда, идентифицируются необычные значения.
- 2 При необходимости делается стабилизирующее дисперсию преобразование.
- 3 Если ряд нестационарен, подбирается порядок дифференцирования.
- 4 Анализируются ACF/PACF, чтобы понять, можно ли использовать модели AR(p)/MA(q).
- 5 Обучаются модели-кандидаты, сравнивается их AIC/AICс.
- 6 Остатки полученной модели исследуются на несмещённость, стационарность и неавтокоррелированность; если предположения не выполняются, исследуются модификации модели.
- 7 В финальной модели t заменяется на $T + h$, будущие наблюдения — на их прогнозы, будущие ошибки — на нули, прошлые ошибки — на остатки.

Построение предсказательного интервала

Если остатки модели нормальны и гомоскедастичны, предсказательные интервалы определяются теоретически.

Например, для прогноза на следующую точку предсказательный интервал — $\hat{y}_{T+1|T} \pm 1.96\hat{\sigma}_\varepsilon$.

Если нормальность или гомоскедастичность не выполняется, предсказательные интервалы генерируются с помощью симуляции.

Seasonal multiplicative ARMA/ARIMA

$$ARMA(p, q) \times (P, Q)_s : \Phi_P(B^s) \phi(B) y_t = \alpha + \Theta_Q(B^s) \theta(B) \varepsilon_t,$$

где

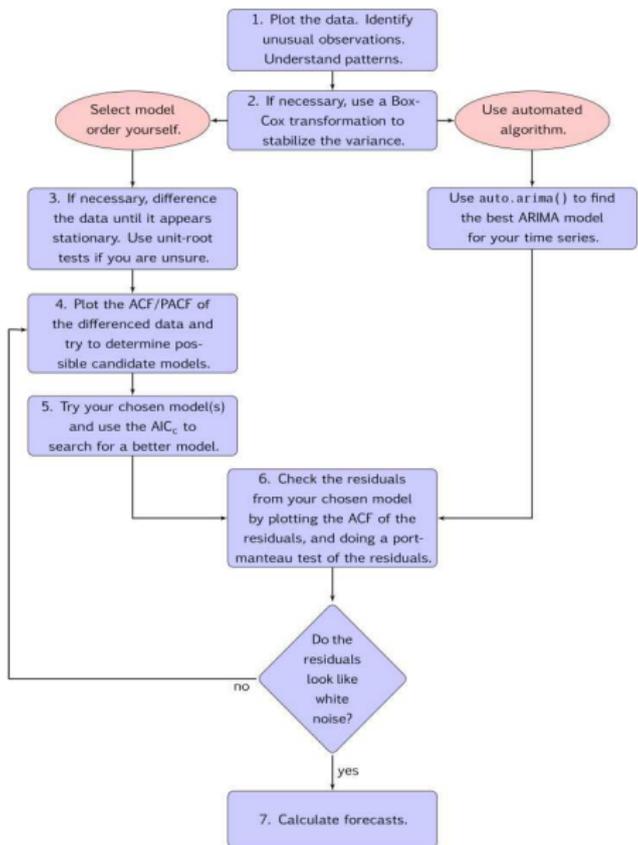
$$\begin{aligned} \Phi_P(B^s) &= 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps}, \\ \Theta_Q(B^s) &= 1 + \Theta_1 B^s + \Theta_2 B^{2s} + \dots + \Theta_Q B^{Qs}. \end{aligned}$$

SARIMA:

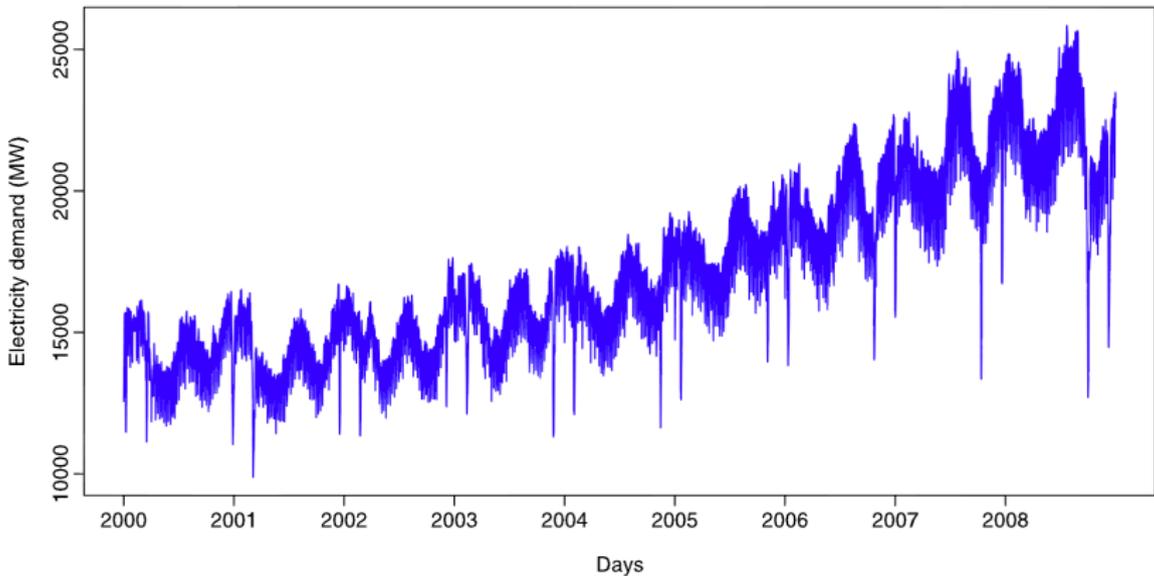
$$\Phi_P(B^s) \phi(B) \nabla_s^D \nabla^d y_t = \alpha + \Theta_Q(B^s) \theta(B) \varepsilon_t.$$

```
auto.arima(x, d=NA, D=NA, max.p=5, max.q=5,  
  max.P=2, max.Q=2, max.order=5, max.d=2, max.D=1,  
  start.p=2, start.q=2, start.P=1, start.Q=1,  
  stationary=FALSE, seasonal=TRUE,  
  ic=c("aicc","aic", "bic"), stepwise=TRUE, trace=FALSE,  
  approximation=(length(x)>100 | frequency(x)>12), xreg=NULL,  
  test=c("kpss","adf","pp"), seasonal.test=c("ocsb","ch"),  
  allowdrift=TRUE, lambda=NULL, parallel=FALSE, num.cores=2)
```

auto.arima



Потребление электричества в Турции



- недельная сезонность;
- годовая сезонность;
- праздники по исламскому календарю (год примерно на 11 дней короче, чем в грегорианском).

regARIMA

Эффекты плавающих праздников, краткосрочных маркетинговых акций и других нерегулярно повторяющихся событий удобно моделировать с помощью regARIMA:

$$\Phi_P(B^s)\phi(B)\nabla_s^D\nabla^d z_t = \Theta_Q(B^s)\theta(B)\varepsilon_t$$

+

$$y_t = \sum_{j=1}^k \beta_j x_{jt} + z_t$$

=

$$\Phi_P(B^s)\phi(B)\nabla_s^D\nabla^d \left(y_t - \sum_{j=1}^k \beta_j x_{jt} \right) = \Theta_Q(B^s)\theta(B)\varepsilon_t.$$

Оценка параметров модели

- 1 Проверить стационарность признаков, если её нет, перейти к разностям. Для лучшей интерпретируемости разностный оператор следует применять и к признакам тоже.
- 2 Для ряда разностей строится регрессия в предположении, что ошибки описываются моделью начального приближения (как правило, $AR(2)$ или $SARMA(2, 0, 0) \times (1, 0)_s$).
- 3 Для остатков регрессии \hat{z}_t подбирается подходящая модель $ARMA(p_1, q_1)$.
- 4 Регрессия перестраивается в предположении, что ошибки описываются моделью $ARMA(p_1, q_1)$.
- 5 Анализируются остатки $\hat{\varepsilon}_t$.

Для подзадачи регрессии формальная проверка значимости признаков неприменима, для отбора признаков необходимо сравнивать значения AIC моделей со всеми подмножествами x_j .

Пример: <https://www.otexts.org/fpp/9/1>

Реализации

- US Census Bureau: X-12-ARIMA, X-13-ARIMA-SEATS (<http://www.census.gov/srd/www/x13as/>, доступен через иностранные прокси-серверы);
- Matlab: regARIMA (с 2013b);
- R: параметр xreg в функциях auto.arima и Arima.

Пример

Продажи австралийского вина:
<https://yadi.sk/d/K7f8Yi0-fwDwt>

Литература

Hyndman R.J., Athanasopoulos G. *Forecasting: principles and practice*. — OTexts, 2015. <https://www.otexts.org/book/fpp>

Hyndman, R.J., Koehler, A.B., Ord, J.K., Snyder, R.D. *Forecasting with Exponential Smoothing: The State Space Approach*. — Berlin: Springer, 2008.