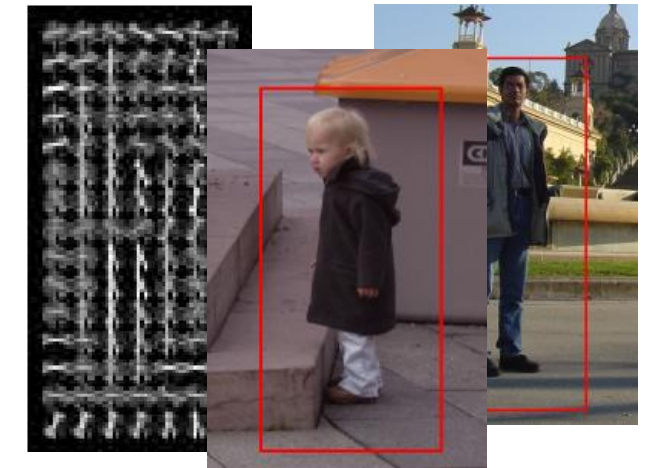
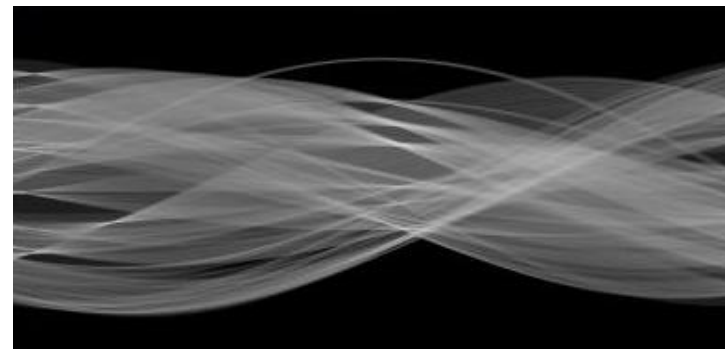
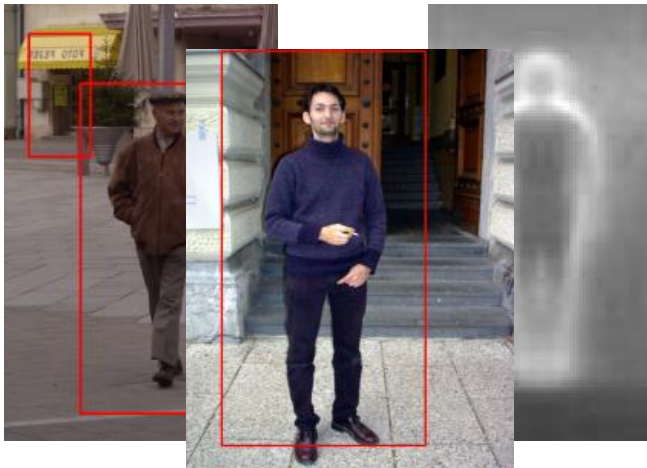


Обработка изображений в системах искусственного интеллекта

(курс лекций)

http://bit.ly/ML_IS_CV

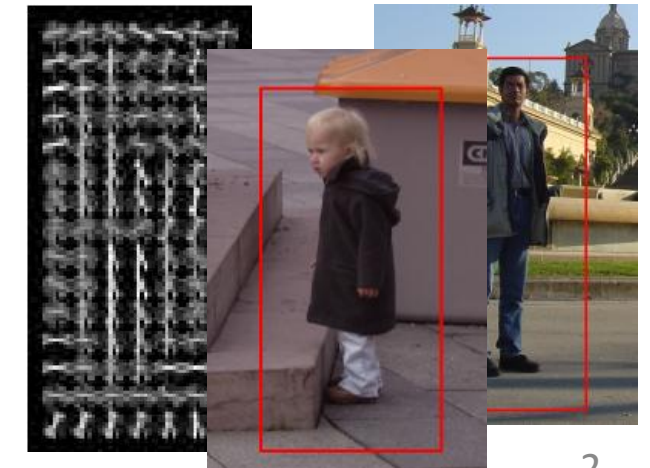
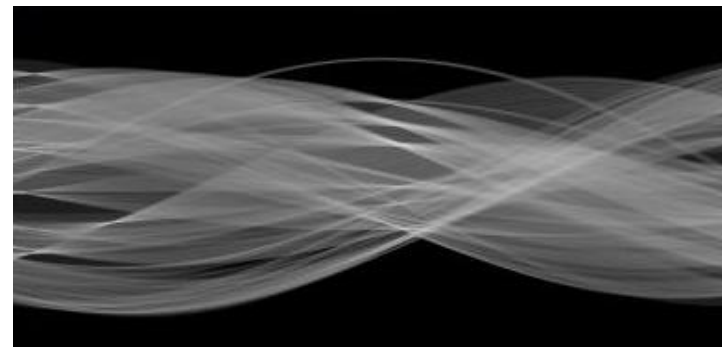
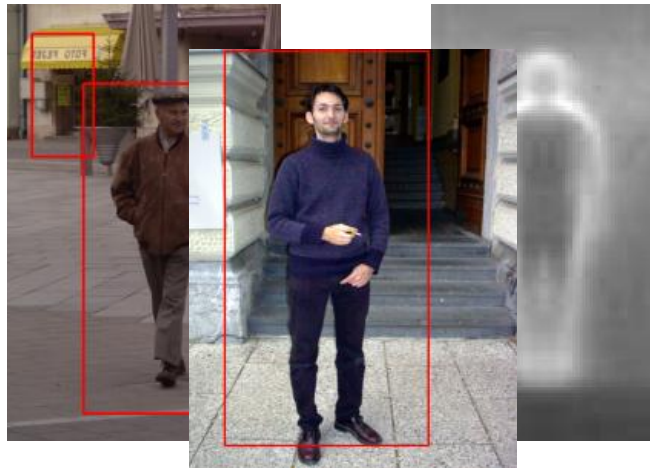
Гнеушев Александр Николаевич 



Спектральный анализ изображения

Тема 11

15.09.2026



Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент

Пусть $\mathbf{f} = [f_1 \dots f_Q]^T$ – Q -мерный вектор-столбец изображения из множества реализаций (**ансамбля**) изображений $\{\mathbf{f}_k\}$.

Информационная эффективность представления реализаций изображения $\mathbf{f}$: $\eta = \frac{H(\mathbf{f})}{l_{\text{cp}}}$.

Рассмотрим преобразование изображения $\mathbf{f}$ такое чтобы уменьшить среднюю длину представления изображения l_{cp} с минимальными потерями информации $H(\mathbf{f})$, для увеличения эффективности η .

Будем искать линейное преобразование Ψ :

$$\begin{aligned}\mathbf{z} &= \Psi(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\}) \Rightarrow z_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T (\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\}), \\ \mathbf{z} &= [z_1 \dots z_Q]^T, \mathbf{f} = [f_1 \dots f_Q]^T, i = 1, \dots, Q,\end{aligned}$$

где матрица $\Psi = [\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_Q]^T$, $|\Psi| \neq 0$, состоит из линейно-независимых столбцов $\boldsymbol{\varphi}_i$.

Идея: если преобразование Ψ будет максимизировать количество информации в одном подмножестве компонент $[z_1 \dots z_m]^T$ преобразованного изображения $\mathbf{z}$, то остальное подмножество компонент $[z_{m+1} \dots z_Q]^T$ будет содержать минимальное количество информации, т.е. преобразование Ψ должно перераспределять количество информации в компонентах вектора $\mathbf{z}$, так чтобы можно было удалить те компоненты, которые несут несущественную долю информации: $H([z_1 \dots z_m]^T, \Psi) \approx H(\mathbf{z}, \Psi) = H(\mathbf{f})$, тем самым уменьшить длину представления $l_{\text{cp}} = \text{len}([z_1 \dots z_m]^T) \leq \text{len}([z_1 \dots z_Q]^T) \leq \text{len}([f_1 \dots f_Q]^T)$ и увеличить эффективность η , где $H(\mathbf{z}, \Psi)$ – количество информации, содержащейся в представлении вектора $\mathbf{z}$ и матрицы преобразования Ψ , таким образом, часть информации $H(\mathbf{f})$ перейдет в $H(\Psi)$.

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент

Пусть $\mathbf{f} = [f_1 \dots f_Q]^T$ – Q -мерный вектор-столбец изображения из множества реализаций (**ансамбля**) изображений $\{\mathbf{f}_k\}$.

Информационная эффективность представления реализаций изображения $\mathbf{f}$: $\eta = \frac{H(\mathbf{f})}{l_{\text{cp}}}$.

Рассмотрим преобразование изображения $\mathbf{f}$ такое чтобы уменьшить среднюю длину представления изображения l_{cp} с минимальными потерями информации $H(\mathbf{f})$, для увеличения эффективности η .

Будем искать линейное преобразование Ψ :

$$\mathbf{z} = \Psi(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\}) \Rightarrow z_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T (\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\}),$$
$$\mathbf{z} = [z_1 \dots z_Q]^T, \mathbf{f} = [f_1 \dots f_Q]^T, i = 1, \dots, Q,$$

где матрица $\Psi = [\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_Q]^T$, $|\Psi| \neq 0$, состоит из линейно-независимых столбцов $\boldsymbol{\varphi}_i$.

Идея: если преобразование Ψ будет максимизировать количество информации в одном подмножестве компонент $[z_1 \dots z_m]^T$ преобразованного изображения $\mathbf{z}$, то остальное подмножество компонент $[z_{m+1} \dots z_Q]^T$ будет содержать минимальное количество информации, т.е. преобразование Ψ должно перераспределять количество информации в компонентах вектора $\mathbf{z}$, так чтобы можно было удалить те компоненты, которые несут несущественную долю информации: $H([z_1 \dots z_m]^T, \Psi) \approx H(\mathbf{z}, \Psi) = H(\mathbf{f})$, тем самым уменьшить длину представления $l_{\text{cp}} = \text{len}([z_1 \dots z_m]^T) \leq \text{len}([z_1 \dots z_Q]^T) \leq \text{len}([f_1 \dots f_Q]^T)$ и увеличить эффективность η , где $H(\mathbf{z}, \Psi)$ – количество информации, содержащейся в представлении вектора $\mathbf{z}$ и матрицы преобразования Ψ , таким образом, часть информации $H(\mathbf{f})$ перейдет в $H(\Psi)$.

В соответствии со свойством $H(z_i) \geq H(z_i|z_{i-1}) \geq H(z_i|z_{i-1}, z_{i-2}, \dots)$ для увеличения количества информации в компоненте z_i необходимо уменьшить зависимость (скоррелированность) компонент между собой. Поэтому, в предположении нормального распределения каждой компоненты $\mathbf{f}$ будем искать матрицу Ψ из условия декорреляции компонент в векторном пространстве реализаций $\{\mathbf{z}_k\}$:

$$M\{\mathbf{z}\mathbf{z}^T\} = \Lambda \Leftrightarrow \mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \Lambda,$$

где Λ -диагональная автокорреляционная матрица, $M\{\}$ - мат. ожидание по векторной выборке реализаций $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_k]$, полученной путем преобразования Ψ векторной выборки реализаций $\mathbf{F} = [\mathbf{f}_k]$, где $\mathbf{Z}, \mathbf{F}$ – матрицы составленные из соответствующих столбцов-векторов выборки реализаций:

$\mathbf{Z} = \Psi(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})$ - преобразование Хотеллинга (Hotelling transform)

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент

Подставив в условие: $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \mathbf{\Lambda}$, модель преобразования $\mathbf{Z} = \mathbf{\Psi}(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})$ и ковариационную матрицу реализацией изображений

$$\mathbf{\Sigma}_f = M\{(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^T\} = (\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})^T$$

преобразование $\mathbf{\Psi}$ диагонализует симметричную матрицу $\mathbf{\Sigma}_f$

$$\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \mathbf{\Psi}(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})^T\mathbf{\Psi}^T = \boxed{\mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma}_f\mathbf{\Psi}^T} = \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_Q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_Q \end{pmatrix}$$

Собственные числа

$$\mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma}_f\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Lambda} \Leftrightarrow \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma}_f\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Lambda}$$

$\mathbf{\Sigma}_f$ – симметричная $\Rightarrow \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Psi} = \mathbf{I}$ (спектральная теорема) $\Leftrightarrow \mathbf{\Sigma}_f\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Lambda} \Rightarrow \boxed{\mathbf{\Sigma}_f\boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i}$ $i = 1, \dots, Q$ – уравнения для собственных ортогональных векторов $\boldsymbol{\varphi}_i$ матрицы $\mathbf{\Sigma}_f$.

Спектральная теорема:

Любая **симметричная** матрица
приводится к диагональному виду с
диагональю из собственных значений
с помощью ортогональной матрицы.

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент

Подставив в условие: $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \mathbf{\Lambda}$, модель преобразования $\mathbf{Z} = \mathbf{\Psi}(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})$ и ковариационную матрицу реализацией изображений

$$\mathbf{\Sigma}_f = M\{(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^T\} = (\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})^T$$

преобразование $\mathbf{\Psi}$ диагонализует симметричную матрицу $\mathbf{\Sigma}_f$

$$\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \mathbf{\Psi}(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})^T\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma}_f\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_Q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_Q \end{pmatrix}$$

Собственные числа

$$\mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma}_f\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Lambda} \Leftrightarrow \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma}_f\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Lambda}$$

$\mathbf{\Sigma}_f$ – симметричная $\Rightarrow \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Psi} = \mathbf{I}$ (спектральная теорема) $\Leftrightarrow \mathbf{\Sigma}_f\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Lambda} \Rightarrow \mathbf{\Sigma}_f\boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i$ $i = 1, \dots, Q$ – уравнения для собственных ортогональных векторов $\boldsymbol{\varphi}_i$ матрицы $\mathbf{\Sigma}_f$.

Ортогональная матрица $\mathbf{\Psi}$ состоит из **ортогональных** столбцов $\boldsymbol{\varphi}_i$, по ортогональным проекциям $z_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\}) = \langle \boldsymbol{\varphi}_i^T, \mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\} \rangle$ можно восстановить вектор $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^Q z_i \boldsymbol{\varphi}_i + M\{\mathbf{f}\} = \sum_{i=1}^Q \langle \boldsymbol{\varphi}_i^T, \mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\} \rangle \boldsymbol{\varphi}_i + M\{\mathbf{f}\} = \mathbf{\Psi}\mathbf{z} + M\{\mathbf{f}\}$$

Вычислим только первые $m < Q$ компонент вектора $\mathbf{z}$:

$$\hat{\mathbf{f}}(m) - M\{\mathbf{f}\} = \sum_{i=1}^m z_i \boldsymbol{\varphi}_i + \sum_{i=m+1}^Q b_i \boldsymbol{\varphi}_i, \quad b_i - \text{константы. Подберем их так, что ошибка представления } \hat{\mathbf{f}} \text{ была минимальная.}$$

остаток

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент

Подставив в условие: $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \mathbf{\Lambda}$, модель преобразования $\mathbf{Z} = \mathbf{\Psi}(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})$ и ковариационную матрицу реализаций изображений

$$\mathbf{\Sigma}_f = M\{(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^T\} = (\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})^T$$

преобразование $\mathbf{\Psi}$ диагонализует симметричную матрицу $\mathbf{\Sigma}_f$

$$\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \mathbf{\Psi}(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{F} - M\{\mathbf{f}\})^T\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma}_f\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_Q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_Q \end{pmatrix}$$

Собственные числа

$$\mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma}_f\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Lambda} \Leftrightarrow \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Psi}\mathbf{\Sigma}_f\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Lambda}$$

$\mathbf{\Sigma}_f$ – симметричная $\Rightarrow \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Psi} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{\Sigma}_f\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Lambda} \Rightarrow \mathbf{\Sigma}_f\boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i$ $i = 1, \dots, Q$ – уравнения для собственных ортогональных векторов $\boldsymbol{\varphi}_i$ матрицы $\mathbf{\Sigma}_f$.
(спектральная теорема)

Ортогональная матрица $\mathbf{\Psi}$ состоит из ортогональных столбцов $\boldsymbol{\varphi}_i$, по ортогональным проекциям $z_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\}) = \langle \boldsymbol{\varphi}_i^T, \mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\} \rangle$ можно восстановить вектор $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^Q z_i \boldsymbol{\varphi}_i + M\{\mathbf{f}\} = \sum_{i=1}^Q \langle \boldsymbol{\varphi}_i^T, \mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\} \rangle \boldsymbol{\varphi}_i + M\{\mathbf{f}\} = \mathbf{\Psi}\mathbf{z} + M\{\mathbf{f}\}$$

Вычислим только первые $m < Q$ компонент вектора $\mathbf{z}$:

$$\hat{\mathbf{f}}(m) - M\{\mathbf{f}\} = \sum_{i=1}^m z_i \boldsymbol{\varphi}_i + \sum_{i=m+1}^Q b_i \boldsymbol{\varphi}_i, \quad b_i - \text{константы. Ошибка представления: } e(m) = \mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}(m) = \mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\} - \sum_{i=1}^m z_i \boldsymbol{\varphi}_i - \sum_{i=m+1}^Q b_i \boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{i=m+1}^Q (z_i - b_i) \boldsymbol{\varphi}_i$$

остаток

Средняя ошибка по множеству реализаций $\{\mathbf{z}_k\}$: $\overline{e^2}(m) = M\{\|e(m)\|^2\} = M\left\{\sum_{i=m+1}^Q \sum_{j=m+1}^Q (z_i - b_i)(z_j - b_j) \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j\right\} = \sum_{i=m+1}^Q M\{(z_i - b_i)^2\}$

Выберем оптимальные константы:

$$\frac{\partial \overline{e^2}(m)}{\partial b_i} = -2(M\{z_i\} - b_i) = 0, \Rightarrow b_i = M\{z_i\} = \boldsymbol{\varphi}_i^T M\{(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})\} = \boldsymbol{\varphi}_i^T (M\{\mathbf{f}\} - M\{\mathbf{f}\}) = \mathbf{0}, \quad i = m+1, \dots, Q$$

(следствие предварительного центрирования множества $\{\mathbf{f}\}$)

$$\hat{\mathbf{f}}(m) = \sum_{i=1}^m z_i \boldsymbol{\varphi}_i + M\{\mathbf{f}\}, \quad m < Q$$



$$\overline{e^2}(m) = M\{\|\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}(m)\|^2\} = \sum_{i=m+1}^Q M\{(z_i - M\{z_i\})^2\}$$

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент

С учетом $M\{\mathbf{f}\}$ ошибка аппроксимации $\hat{\mathbf{f}}(m)$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow M\{\|\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}(m)\|^2\} &= \sum_{i=m+1}^Q M\{(z_i - b_i)^2\} = \sum_{i=m+1}^Q M\{(z_i - \underset{=0}{M\{z_i\}})^2\} = \sum_{i=m+1}^Q \boldsymbol{\varphi}_i^T M\{(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^T\} \boldsymbol{\varphi}_i = \\ &= \sum_{i=m+1}^Q \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{f}} \boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{i=m+1}^Q \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{i=m+1}^Q \lambda_i = \sum_{i=m+1}^Q \sigma_i^2 \quad \text{- остаточная дисперсия} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{z}} &= \mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{f}} \boldsymbol{\Psi} = \\ &= \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_Q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_Q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Минимальная ошибка аппроксимации $\hat{\mathbf{f}}(m)$ определяется суммой $(Q - m)$ наименьших собственных чисел, компонентами z_i с минимальными дисперсиями.

$$\hat{\mathbf{f}}(m) = \sum_{i=1}^m z_i \boldsymbol{\varphi}_i + M\{\mathbf{f}\}, \quad m < Q$$

Метод главных компонент (преобразование Хотеллинга)

1. Базисные вектора $\boldsymbol{\varphi}_i$ - собственные вектора ковариационной матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{f}} = M\{(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^T\}$ по множеству реализаций $\{\mathbf{f}\}$.
2. Полезность признака-компоненты (с точки зрения представления) определяется соответствующим собственным значением.
3. Признаки взаимно некоррелированы: $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{f}} \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Lambda}$. Для нормального распределения $\{\mathbf{f}\}$ - признаки/компоненты z_i взаимно независимы.
4. Собственные вектора $\boldsymbol{\varphi}_i$ дают наименьшее значение среднеквадратичной ошибки $\overline{e^2}(m)$ среди всех ортонормированных базисных векторов.

Доля ошибки аппроксимации - критерий выбора числа компонент вектора $\mathbf{z}$:

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^Q \lambda_i} = \frac{\lambda_i}{\text{tr} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{z}}}$$

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент через сингулярное разложение (SVD)

Для нахождения матрицы преобразования Ψ можно использовать сингулярное разложение матрицы изображений:

$$\mathbf{F} - \mathbf{M}\{\mathbf{f}\} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T \Rightarrow \Sigma_{\mathbf{f}} = (\mathbf{F} - \mathbf{M}\{\mathbf{f}\})(\mathbf{F} - \mathbf{M}\{\mathbf{f}\})^T = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T\mathbf{V}\mathbf{S}^T\mathbf{U}^T = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{S}^T\mathbf{U}^T = \mathbf{U}\mathbf{S}^2\mathbf{U}^T$$

Условие декорреляции:

$$\Rightarrow \Sigma_{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \Psi\Sigma_{\mathbf{f}}\Psi^T = \Psi\mathbf{U}\mathbf{S}^2\mathbf{U}^T\Psi^T = \Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_Q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_Q \end{pmatrix}$$

$$\text{При } \Psi = \mathbf{U}^T \Rightarrow \Sigma_{\mathbf{z}} = \mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_Q^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{Z} = \mathbf{U}^T(\mathbf{F} - \mathbf{M}\{\mathbf{f}\}) \quad \Rightarrow \mathbf{Z}_m = \mathbf{U}_m^T(\mathbf{F} - \mathbf{M}\{\mathbf{f}\})$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{U}\mathbf{Z} + \mathbf{M}\{\mathbf{f}\} \quad \Rightarrow \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{U}_m\mathbf{Z}_m + \mathbf{M}\{\mathbf{f}\} \quad m < Q$$

$$\mathbf{S} = \Lambda^{1/2} = \left[\begin{array}{cc|c} \overbrace{\lambda^{1/2}(1)}^{m} & & \overbrace{0}^{Q-m} \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{1/2}(m) \\ \hline & & 0 & \overbrace{0}^{Q-m} \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} m \\ Q-m \end{array}} \right\} \begin{array}{l} m \\ Q-m \end{array}$$

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент

Преобразование Хотеллинга максимизирует **информационную эффективность** представления $\eta = \frac{H(\mathbf{f})}{l_{\text{cp}}}$

$$H(\mathbf{f}) = \sum_{q=1}^Q H(f(q))$$

Пусть $P(\mathbf{f})$ - нормальное распределение:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{f}) &= - \int_{\mathcal{P}} (2\pi)^{-Q/2} |\Sigma_{\mathbf{f}}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^T \Sigma_{\mathbf{f}}^{-1} (\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\}) \right\} \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^T \Sigma_{\mathbf{f}}^{-1} (\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\}) - \frac{1}{2} \ln |\Sigma_{\mathbf{f}}| - \frac{1}{2} \ln 2\pi \right] d\mathbf{f} \\ &= \frac{1}{2} Q + \frac{1}{2} \ln |\Sigma_{\mathbf{f}}| + \frac{1}{2} Q \ln 2\pi \end{aligned}$$

Если выбрать главные компоненты в качестве признаков, $|\Sigma_{\mathbf{f}}| = \prod_{i=1}^Q \lambda_i$:

$$H(\mathbf{f}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^Q (1 + \ln \lambda_i + \ln 2\pi) \rightarrow H(\mathbf{z}, m) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (1 + \ln \lambda_i + \ln 2\pi) + e_H, \quad m < Q$$

Большая часть информации содержится в компонентах, соответствующих большим собственным числам.

Критерий отбора:
$$\mu_i = \frac{1 + \ln \lambda_i + \ln 2\pi}{\sum_{i=1}^Q (1 + \ln \lambda_i + \ln 2\pi)}$$

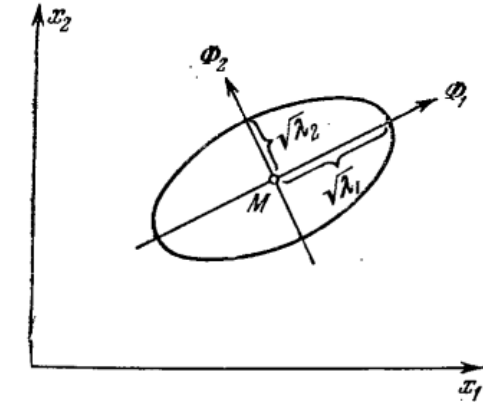
Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент

1. **Базисные вектора** Преобразование Хотеллинга - **Главные компоненты**.

$$\mathbf{z} = \Psi \mathbf{f}, \Sigma_{\mathbf{z}} = \Psi \Sigma_{\mathbf{f}} \Psi^T, \Sigma_{\mathbf{f}} = M\{(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^T\}$$

$$\text{Для: } (\mathbf{z} - \mathbf{M}_{\mathbf{z}})^T (\mathbf{z} - \mathbf{M}_{\mathbf{z}}) = 1: d^2(\mathbf{z}, \mathbf{M}_{\mathbf{z}}, \Sigma_{\mathbf{z}}) = (\mathbf{z} - \mathbf{M}_{\mathbf{z}})^T \Sigma_{\mathbf{z}}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{M}_{\mathbf{z}}) \rightarrow \max$$



- нормированные собственные вектора
максимизируют угловые расстояния от
среднего (**главные компоненты**)

Понятие визуальной избыточности изображения

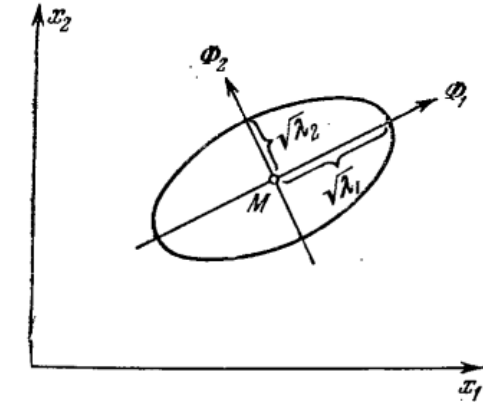
Метод главных компонент

1. Базисные вектора Преобразование Хотеллинга - Главные компоненты.

$$\mathbf{z} = \Psi \mathbf{f}, \quad \Sigma_{\mathbf{z}} = \Psi \Sigma_{\mathbf{f}} \Psi^T, \quad \Sigma_{\mathbf{f}} = M\{(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^T\}$$

Для: $(\mathbf{z} - \mathbf{M}_{\mathbf{z}})^T(\mathbf{z} - \mathbf{M}_{\mathbf{z}}) = 1$: $d^2(\mathbf{z}, \mathbf{M}_{\mathbf{z}}, \Sigma_{\mathbf{z}}) = (\mathbf{z} - \mathbf{M}_{\mathbf{z}})^T \Sigma_{\mathbf{z}}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{M}_{\mathbf{z}}) \rightarrow \max$

$$\tilde{\mathbf{z}} = (\mathbf{z} - \mathbf{M}_{\mathbf{z}}): \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{z}}} \left(\tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_{\mathbf{z}}^{-1} \tilde{\mathbf{z}} - \mu (\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} - 1) \right) = 2 \Sigma_{\mathbf{z}}^{-1} \tilde{\mathbf{z}} - 2 \mu \tilde{\mathbf{z}} = 0 \Rightarrow \Sigma_{\mathbf{z}}^{-1} \tilde{\mathbf{z}} = \mu \tilde{\mathbf{z}} \Rightarrow \Sigma_{\mathbf{z}} \tilde{\mathbf{z}} = \lambda \tilde{\mathbf{z}}$$



- нормированные собственные вектора
максимизируют угловые расстояния от
среднего (**главные компоненты**)

Понятие визуальной избыточности изображения

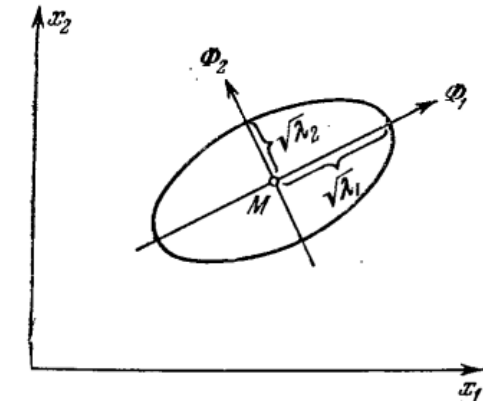
Метод главных компонент

1. **Базисные вектора** Преобразование Хотеллинга - **Главные компоненты**.

$$\mathbf{z} = \Psi \mathbf{f}, \quad \Sigma_{\mathbf{z}} = \Psi \Sigma_{\mathbf{f}} \Psi^T, \quad \Sigma_{\mathbf{f}} = M\{(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})(\mathbf{f} - M\{\mathbf{f}\})^T\}$$

Для: $(\mathbf{z} - \mathbf{M}_{\mathbf{z}})^T (\mathbf{z} - \mathbf{M}_{\mathbf{z}}) = 1$: $d^2(\mathbf{z}, \mathbf{M}_{\mathbf{z}}, \Sigma_{\mathbf{z}}) = (\mathbf{z} - \mathbf{M}_{\mathbf{z}})^T \Sigma_{\mathbf{z}}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{M}_{\mathbf{z}}) \rightarrow \max$

$$\tilde{\mathbf{z}} = (\mathbf{z} - \mathbf{M}_{\mathbf{z}}): \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{z}}} \left(\tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_{\mathbf{z}}^{-1} \tilde{\mathbf{z}} - \mu (\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} - 1) \right) = 2 \Sigma_{\mathbf{z}}^{-1} \tilde{\mathbf{z}} - 2 \mu \tilde{\mathbf{z}} = 0 \Rightarrow \Sigma_{\mathbf{z}}^{-1} \tilde{\mathbf{z}} = \mu \tilde{\mathbf{z}} \Rightarrow \Sigma_{\mathbf{z}} \tilde{\mathbf{z}} = \lambda \tilde{\mathbf{z}}$$



- нормированные собственные вектора
максимизируют угловые расстояния от
среднего (**главные компоненты**)

2. **Базисные вектора** Преобразования Хотеллинга – максимизируют **разнообразие** (разброс) представления.

$$\overline{d_{\mathbf{f}}^2} = M\{\|\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j\|^2\} = M\{\mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j^T \mathbf{f}_j\} - M\{\mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_j + \mathbf{f}_j^T \mathbf{f}_i\} \text{ - внутри множественное расстояние}$$

$$\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \text{ - независимые: } \overline{d_{\mathbf{f}}^2} = 2M\{\mathbf{f}^T \mathbf{f}\} - 2M\{\mathbf{f}^T\}M\{\mathbf{f}\} = 2\text{tr}[M\{\mathbf{f}^T \mathbf{f}\} - \mathbf{M}_{\mathbf{f}} \mathbf{M}_{\mathbf{f}}^T] = 2\text{tr}(\mathbf{K} - \mathbf{M}_{\mathbf{f}} \mathbf{M}_{\mathbf{f}}^T) = 2\text{tr} \Sigma_{\mathbf{f}}$$

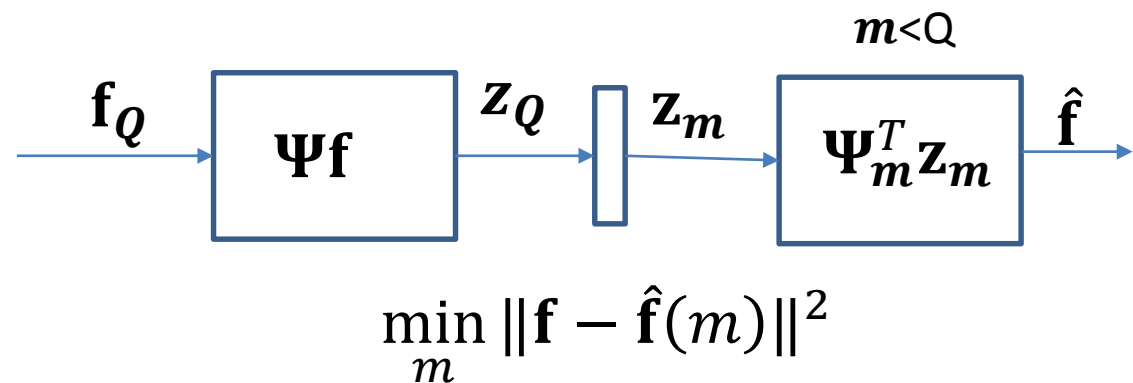
$$\mathbf{z} = \Psi \mathbf{f} \Rightarrow \overline{d_{\mathbf{z}}^2} = 2\text{tr} \Sigma_{\mathbf{z}} = 2\text{tr} \Psi \Sigma_{\mathbf{f}} \Psi^T = 2\text{tr} \Psi^T \Psi \Sigma_{\mathbf{f}} = 2\text{tr} \Sigma_{\mathbf{f}}$$

$$\overline{d_{\mathbf{z}}^2} = 2 \sum_{i=1}^Q \boldsymbol{\varphi}_i^T \Sigma_{\mathbf{z}} \boldsymbol{\varphi}_i \rightarrow \overline{d_{\mathbf{z}}^2(m)} = 2 \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\varphi}_i^T \Sigma_{\mathbf{z}} \boldsymbol{\varphi}_i \text{ - выбор } m \text{ — компонент, максимизирующих внутри множественные расстояния, т.е. выбора } m \text{ главных компонент.}$$

Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент. Связь с нейросетевой моделью автоэнкодера.

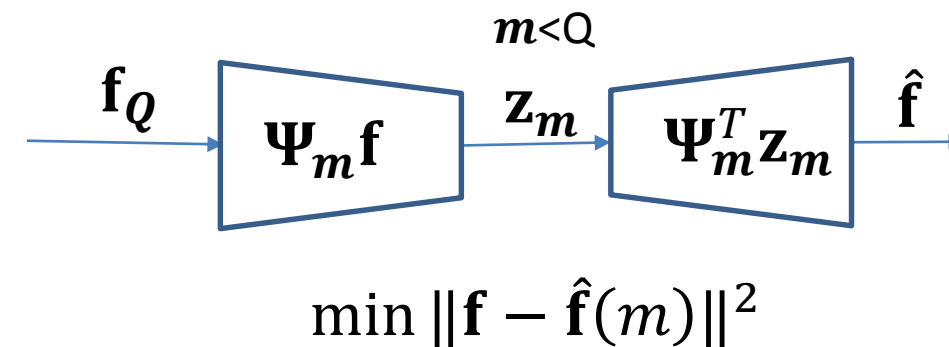
Линейный МГК



Выбор главных компонент



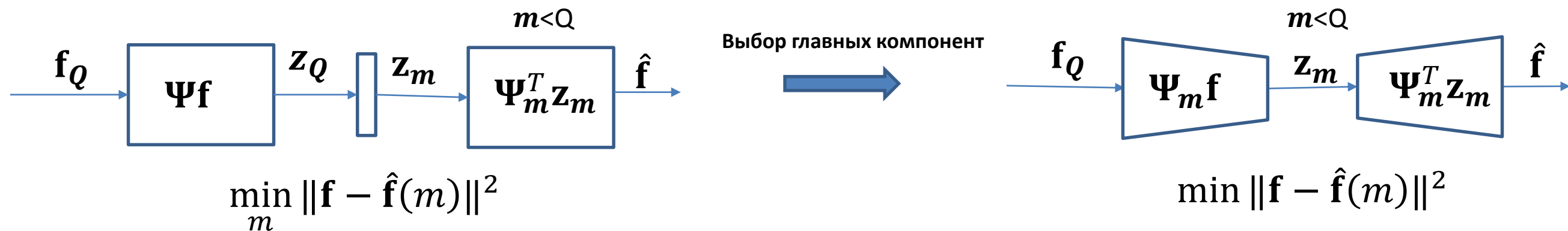
Фиксированные главные компоненты



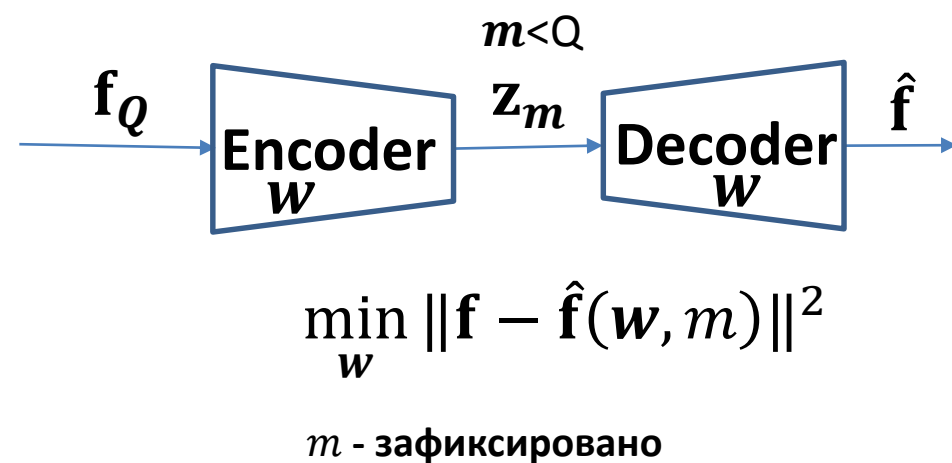
Понятие визуальной избыточности изображения

Метод главных компонент. Связь с нейросетевой моделью автоэнкодера.

Линейный МГК

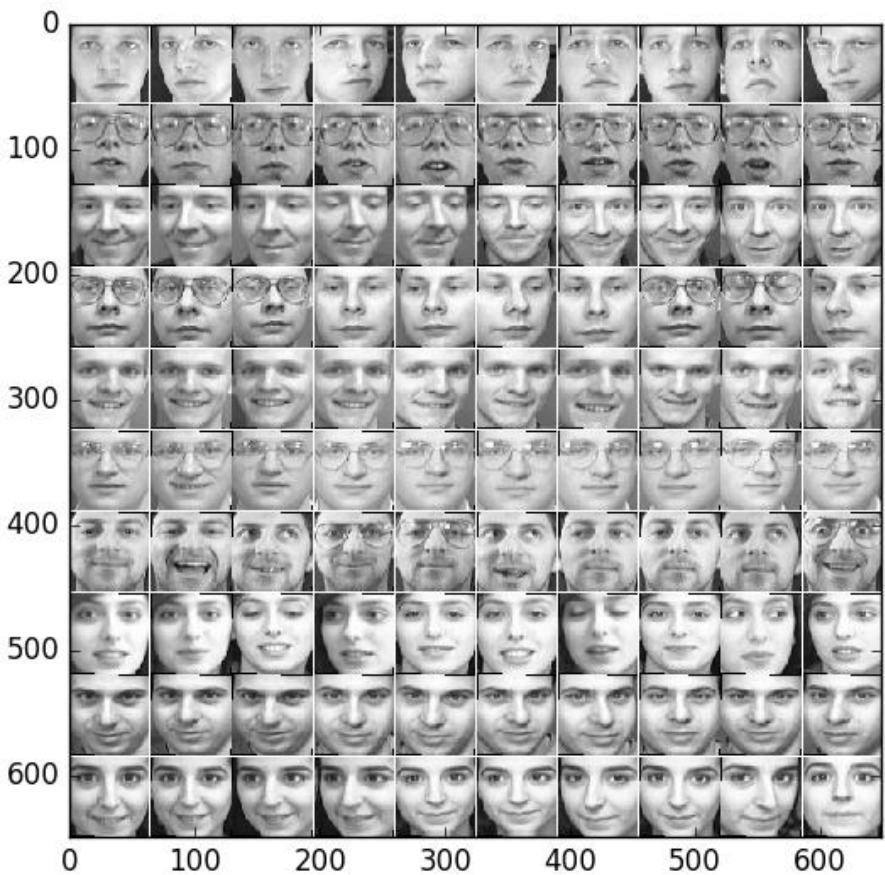


Нейросетевой МГК: Архитектура с узким горлышком – латентным пространством признаков, Автоэнкодер (АЕ)

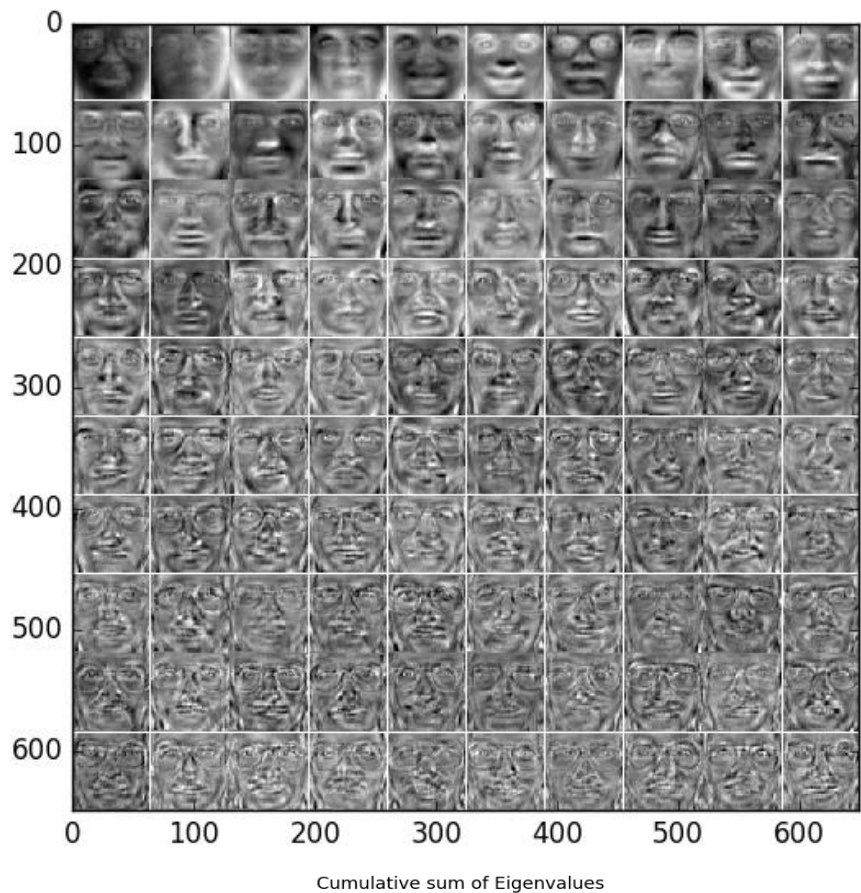


Eigenfaces

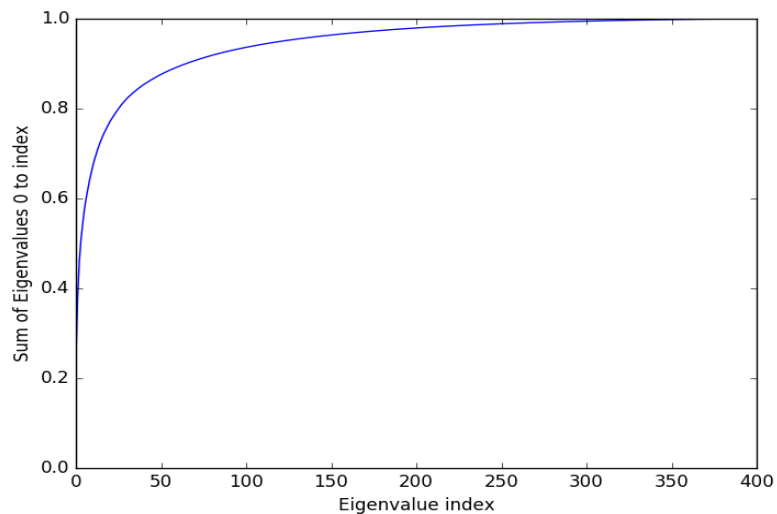
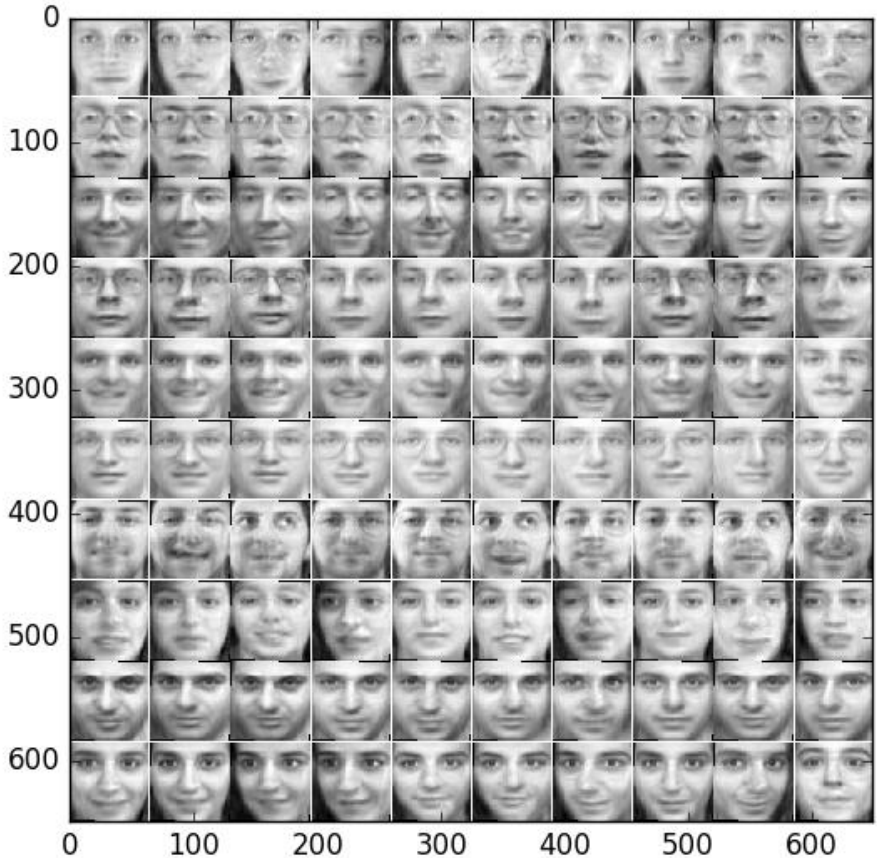
First 100 Face images



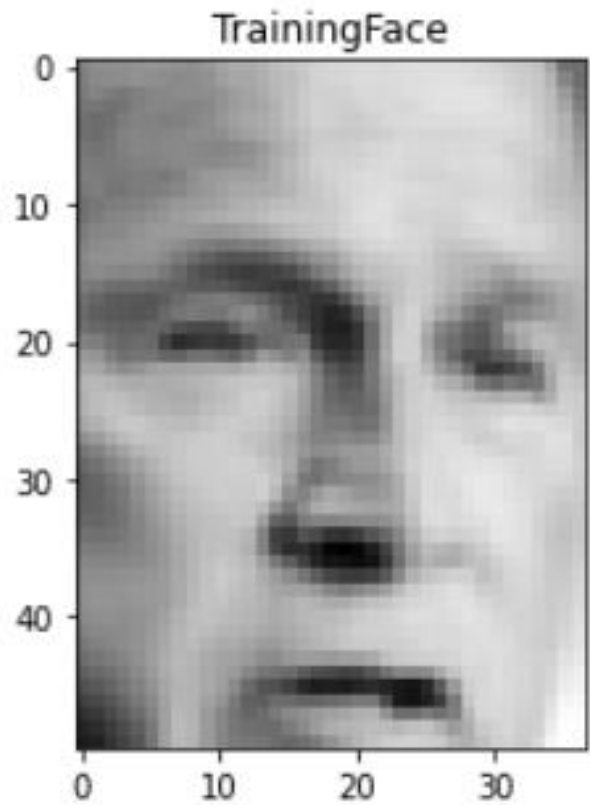
First 100 Eigenvectors of the covariance matrix



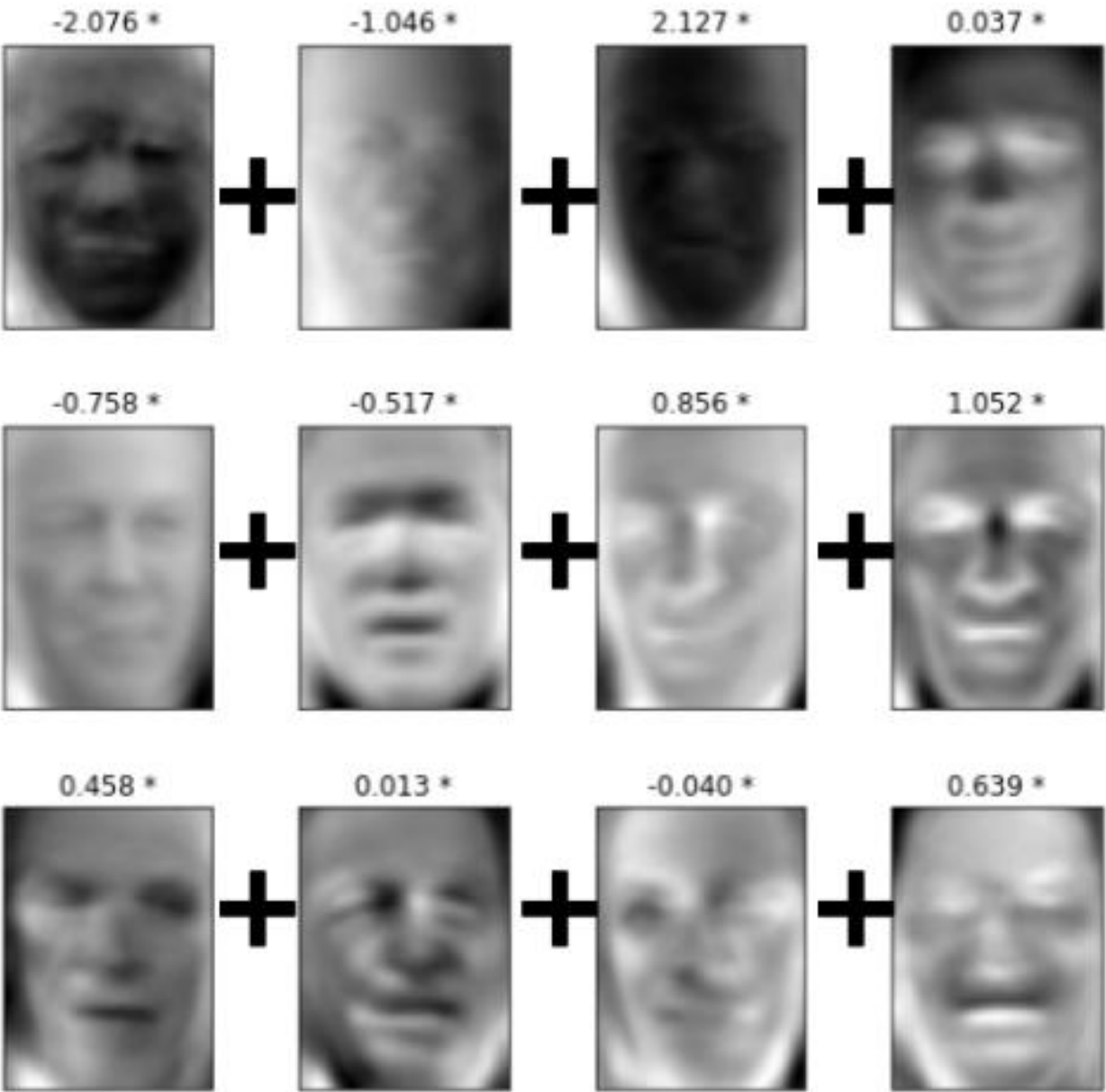
First 100 Face images reconstructed from 50 principal components



Eigenfaces



=



Ортогональные преобразования

Метод главных компонент в непрерывном случае. Преобразование Карунена-Лоэва.

Пусть $\mathbf{f}(x)$ – случайный процесс в интервале $[x_1, x_2]$ можно разложить в ряд:

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

Базисные функции детерминированы и ортогональны $\int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{\varphi}_i(x) \boldsymbol{\varphi}_j^*(x) dx = \delta_{ij}$

$z_i = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{f}(x) \boldsymbol{\varphi}_i^*(x) dx$ - случайные коэффициенты.

Пусть $M\{\mathbf{f}(x)\} = \mathbf{0}$: $R(x, \tau) = M\{\mathbf{f}(x) \mathbf{f}^*(\tau)\} = M\left\{\sum_{j=1}^{\infty} z_j \boldsymbol{\varphi}_j(x) \left[\sum_{i=1}^{\infty} z_i \boldsymbol{\varphi}_i(\tau)\right]^*\right\} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{\varphi}_j(x) \boldsymbol{\varphi}_i^*(\tau) M\{z_j z_i^*\}$

Пусть $M\{z_j z_i^*\} = \lambda_j$ при $j = i$ иначе 0:

$$R(x, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \boldsymbol{\varphi}_j(x) \boldsymbol{\varphi}_j^*(\tau)$$

Ортогональные преобразования

Метод главных компонент в непрерывном случае. Преобразование Карунена-Лоэва.

Пусть $\mathbf{f}(x)$ – случайный процесс в интервале $[x_1, x_2]$ можно разложить в ряд:

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

Базисные функции детерминированы и ортогональны

$$\int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{\varphi}_i(x) \boldsymbol{\varphi}_j^*(x) dx = \delta_{ij}$$

$$z_i = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{f}(x) \boldsymbol{\varphi}_i^*(x) dx - \text{случайные коэффициенты.}$$

$$\text{Пусть } M\{\mathbf{f}(x)\} = \mathbf{0}: \quad R(x, \tau) = M\{\mathbf{f}(x) \mathbf{f}^*(\tau)\} = M\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} z_j \boldsymbol{\varphi}_j(x) \left[\sum_{i=1}^{\infty} z_i \boldsymbol{\varphi}_i(\tau) \right]^* \right\} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{\varphi}_j(x) \boldsymbol{\varphi}_i^*(\tau) M\{z_j z_i^*\}$$

Пусть $M\{z_j z_i^*\} = \lambda_j$ при $j = i$ иначе 0:

$$R(x, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \boldsymbol{\varphi}_j(x) \boldsymbol{\varphi}_j^*(\tau)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \tau) \boldsymbol{\varphi}_i(\tau) d\tau = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \boldsymbol{\varphi}_j(x) \boldsymbol{\varphi}_j^*(\tau) \boldsymbol{\varphi}_i(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \boldsymbol{\varphi}_j(x) \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{\varphi}_j^*(\tau) \boldsymbol{\varphi}_i(\tau) d\tau$$

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \tau) \boldsymbol{\varphi}_i(\tau) d\tau = \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i(x)$$

$$\overline{e^2}(m) = M \left[\int_{x_1}^{x_2} \left(\mathbf{f}(x) - \sum_{i=1}^m z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x) \right) \left(\mathbf{f}(x) - \sum_{i=1}^m z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x) \right)^* dx \right] = M \left[\int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x) \right) \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x) \right)^* dx \right] = \sum_{i=m+1}^{\infty} M\{z_i z_i^*\}$$

Ортогональные преобразования

Метод главных компонент в непрерывном случае. Преобразование Карунена-Лоэва.

$$\overline{e^2}(m) = M \left[\int_{x_1}^{x_2} \left(\mathbf{f}(x) - \sum_{i=1}^m z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x) \right) \left(\mathbf{f}(x) - \sum_{i=1}^m z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x) \right)^* dx \right] = M \left[\int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x) \right) \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x) \right)^* dx \right] = \sum_{i=m+1}^{\infty} M \{ z_i z_i^* \}$$
$$M \{ z_i z_i^* \} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} M \{ \mathbf{f}(x) \mathbf{f}^*(\tau) \} \boldsymbol{\varphi}_i^*(x) \boldsymbol{\varphi}_i(\tau) dx d\tau = \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} R(x, \tau) \boldsymbol{\varphi}_i^*(x) \boldsymbol{\varphi}_i(\tau) dx d\tau = \int_{x_1}^{x_2} \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i^*(x) \boldsymbol{\varphi}_i(x) dx = \lambda_i \quad \Rightarrow \quad \overline{e^2}(m) = \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i$$

Ортогональные преобразования

Преобразование Карунена-Лоэва для изображения как реализации стационарного процесса

$$\begin{aligned} \overline{e^2}(m) &= M \left[\int_{x_1}^{x_2} \left(\mathbf{f}(x) - \sum_{i=1}^m z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x) \right) \left(\mathbf{f}(x) - \sum_{i=1}^m z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x) \right)^* dx \right] = M \left[\int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x) \right) \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} z_i \boldsymbol{\varphi}_i(x) \right)^* dx \right] = \sum_{i=m+1}^{\infty} M \{ z_i z_i^* \} \\ M \{ z_i z_i^* \} &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} M \{ \mathbf{f}(x) \mathbf{f}^*(\tau) \} \boldsymbol{\varphi}_i^*(x) \boldsymbol{\varphi}_i(\tau) dx d\tau = \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} R(x, \tau) \boldsymbol{\varphi}_i^*(x) \boldsymbol{\varphi}_i(\tau) dx d\tau = \int_{x_1}^{x_2} \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i^*(x) \boldsymbol{\varphi}_i(x) dx = \lambda_i \quad \Rightarrow \boxed{\overline{e^2}(m) = \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i} \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{f}(x)$ - стационарный процесс (в широком смысле):

$$m_{\mathbf{f}}(x) = m_{\mathbf{f}} = \text{const},$$

$$R(x, \tau) = R(x - \tau)$$

$$\boxed{\int_{-T/2}^{T/2} R(x - \tau) \boldsymbol{\varphi}_i(\tau) d\tau = \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i(x), \quad -T/2 \leq x \leq T/2, \quad T = x_2 - x_1.}$$

1. Случай $T \rightarrow \infty$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} R(x - \tau) \boldsymbol{\varphi}_i(\tau) d\tau = \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i(x), \quad -\infty \leq x \leq \infty} \quad \text{- интеграл свертки}$$

По теореме о свертке: $\Rightarrow \mathcal{F}_R(\omega) \Phi_i(j\omega) = \lambda_i \Phi_i(j\omega)$, $\mathcal{F}_R(\omega)$ – спектр мощности

выполняется при:

$$\begin{aligned} \Phi_i(j\omega) &= \delta(\omega - \omega_i) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\varphi}_i(x) = \exp(j\omega_i x)} \\ &\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}_R(\omega) = \lambda_i} \end{aligned}$$

Преобразование Карунена-Лоэва $\rightarrow$ Преобразование Фурье

$$z_i = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(x) \boldsymbol{\varphi}_i^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(x) \exp(-j\omega_i x) dx$$

Ортогональные преобразования

Преобразование Карунена-Лоэва для изображения как реализации стационарного процесса

2. Случай T - конечно, нижняя частота равна: $\omega_0 = 2\pi/T$

Пусть: $\phi_k(x) \cong \exp(jk\omega_0 x)$, $k = 1, 2, \dots$

$$R(x - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_R(\omega) \exp(j\omega(x - \tau)) d\omega$$

$$\Rightarrow \lambda_k \phi_k(x) = \int_{-1/T}^{1/T} R(x - \tau) \phi_k(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_R(\omega) \int_{-1/T}^{1/T} \exp(j\omega(x - \tau)) \exp(jk\omega_0 \tau) d\tau d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_R(\omega) \exp(j\omega x) T \left\{ \frac{\sin\left\{\left[(k\omega_0 - \omega)/2\right]T\right\}}{\left[(k\omega_0 - \omega)/2\right]T} \right\} d\omega$$

Оконная (выборочная) функция

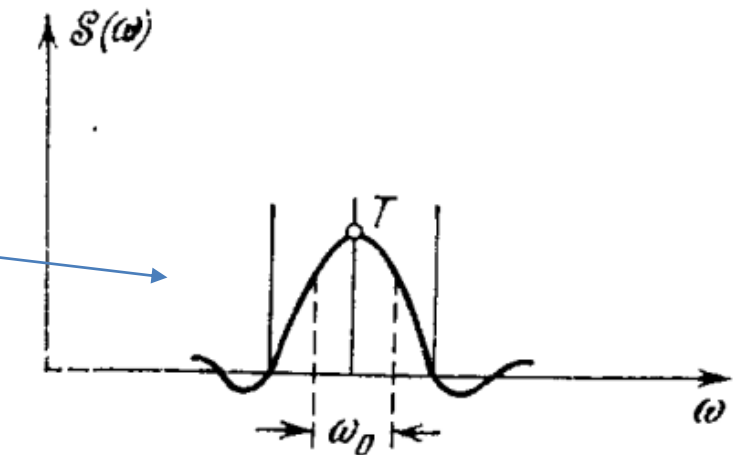
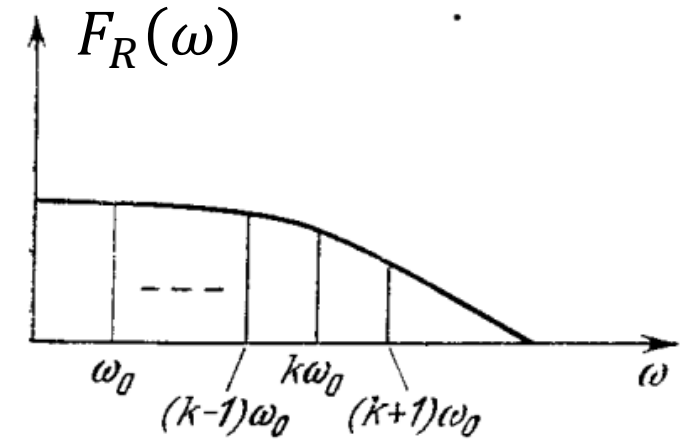
Пусть $F_R(\omega) \exp(j\omega x)$ - слабо меняется между $(k-1)\omega_0$ и $(k+1)\omega_0$:

$$\lambda_k \phi_k(x) \cong \mathcal{F}_R(k\omega_0) \exp(jk\omega_0 x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T \left\{ \frac{\sin\left\{\left[(k\omega_0 - \omega)/2\right]T\right\}}{\left[(k\omega_0 - \omega)/2\right]T} \right\} d\omega = \mathcal{F}_R(k\omega_0) \exp(jk\omega_0 x)$$

$\Rightarrow \lambda_k \cong \mathcal{F}_R(k\omega_0)$ - отсчеты спектральной функции

Преобразование Карунена-Лоэва $\rightarrow$ Преобразование Фурье

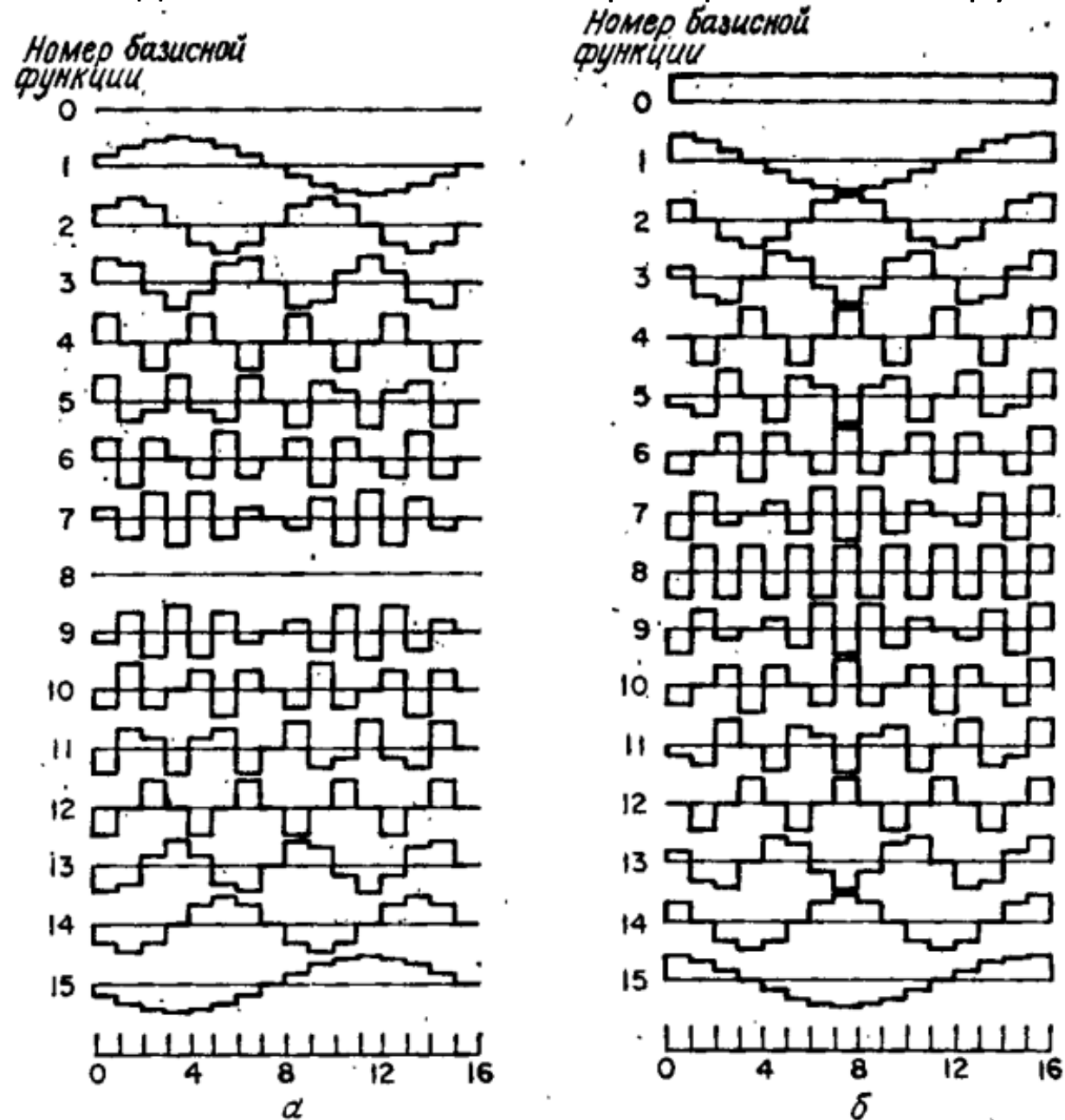
$$z_i = \int_{-1/T}^{1/T} \mathbf{f}(x) \phi_i^*(x) dx = \int_{-1/T}^{1/T} \mathbf{f}(x) \exp(-jk\omega_0 x) dx$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega/2T)}{(\omega/2T)} d\omega = 2\pi T$$

Ортогональные преобразования

Метод главных компонент. Преобразование Карунена-Лоэва



Базисные функции преобразования Фурье.

Аппроксимация преобразования Карунена-Лоэва для марковского процесса

Для марковского процесса первого порядка автокорреляционная функция и энергетический спектр:

$$R(\tau_x, \tau_y) = \sigma_s^2 \exp \left\{ -\sqrt{\alpha_x^2 \tau_x^2 + \alpha_y^2 \tau_y^2} \right\}$$

$$\mathcal{F}_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\alpha_x \alpha_y} \frac{2\sigma_s^2}{1 + (\omega_x^2 / \alpha_x^2 + \omega_y^2 / \alpha_y^2)}$$

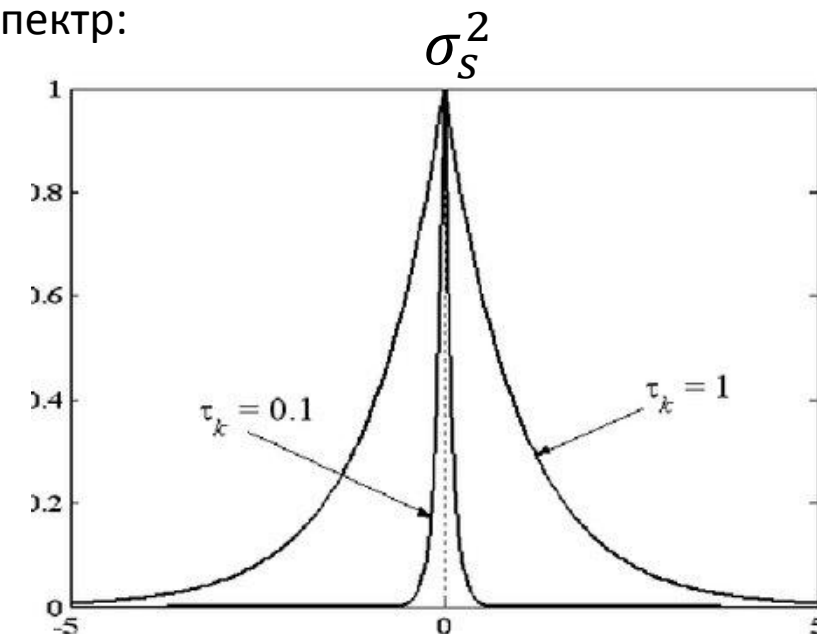
$$\lambda_k \cong \mathcal{F}_R(k\omega_0)$$

Разделимое представление:

$$R(\tau_x, \tau_y) = \sigma_s^2 \exp \left\{ -\alpha_x |\tau_x| - \alpha_y |\tau_y| \right\}$$

$$\mathcal{F}_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{4\alpha_x \alpha_y \sigma_s^2}{(\alpha_x^2 + \omega_x^2)(\alpha_y^2 + \omega_y^2)}$$

$\tau_k = 1/\alpha$ — интервал корреляции.



Марковский процесс первого порядка можно сформировать рекуррентной формулой:

$$F(j+1, k+1) = \rho_1 F(j+1, k) + \rho_2 F(j, k+1) - \rho_1 \rho_2 F(j, k) + \sqrt{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)} u(j, k)$$

где ρ_1 и ρ_2 — коэффициенты корреляции между горизонтальными и вертикальными соседними элементами изображения соответственно, $u(j, k)$ — некоррелированное случайное поле, дисперсия которого равна дисперсии элементов изображения.

Трех диагональная автокорреляционная матрица Марковского процесса первого порядка:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & -\alpha & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & -\alpha & 1 & -\alpha \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix},$$

где $\alpha = \rho / (1 + \rho^2)$, причем $0 \leq \rho \leq 1$ — коэффициент корреляции соседних элементов марковского процесса.

Ортогональные преобразования

Для марковского процесса первого порядка с автокорреляционной матрицей $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{AQA}^T = \mathbf{D}$$

где $\mathbf{D}$ — диагональная матрица, составленная из элементов

$$D(k, k) = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos [k\pi/(N+1)] + \rho^2}$$

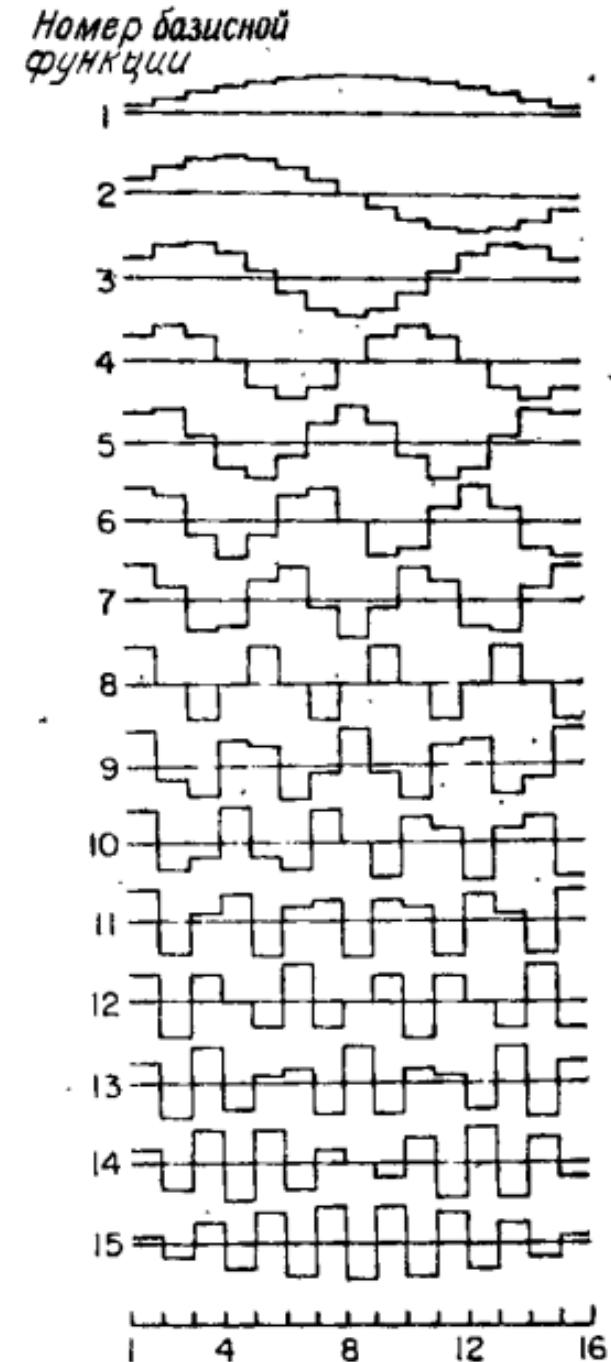
при $k = 1, 2, \dots, N$.

Матрица $\mathbf{A}$ составлена из базисных функций вида:

$$A(u, j) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \left[\frac{(j+1)(u+1)\pi}{N+1} \right]$$

Аппроксимация преобразования Карунена-Лоэва для марковского процесса первого порядка → **Синусное преобразование**

$$\mathcal{F}(u, v) = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j, k) \sin \left[\frac{(j+1)(u+1)\pi}{N+1} \right] \times \\ \times \sin \left[\frac{(k+1)(v+1)\pi}{N+1} \right], \quad ($$



Ортогональные преобразования

Четное симметричное косинусное преобразование

$$F_s(j, k) = \begin{cases} F(j, k) & \text{при } j \geq 0, k \geq 0, \\ F(-1-j, k) & \text{при } j < 0, k \geq 0, \\ F(j, -1-k) & \text{при } j \geq 0, k < 0, \\ F(-1-j, -1-k) & \text{при } j < 0, k < 0. \end{cases}$$

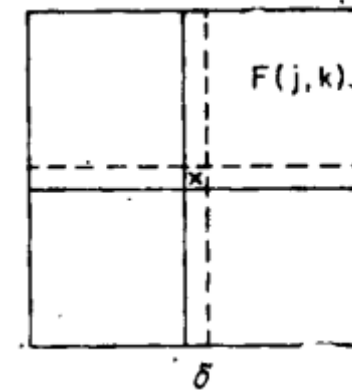
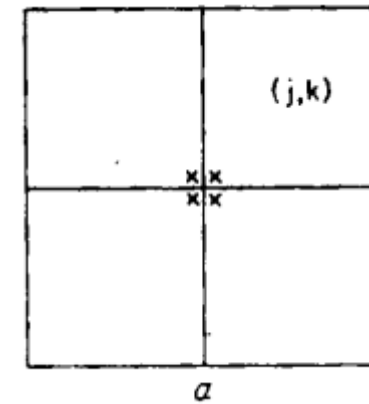
Преобразование Фурье $\rightarrow$ Косинусное преобразование

$$\mathcal{F}_s(u, v) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j, k) \cos \left[\frac{\pi}{N} u \left(j + \frac{1}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{\pi}{N} v \left(k + \frac{1}{2} \right) \right].$$

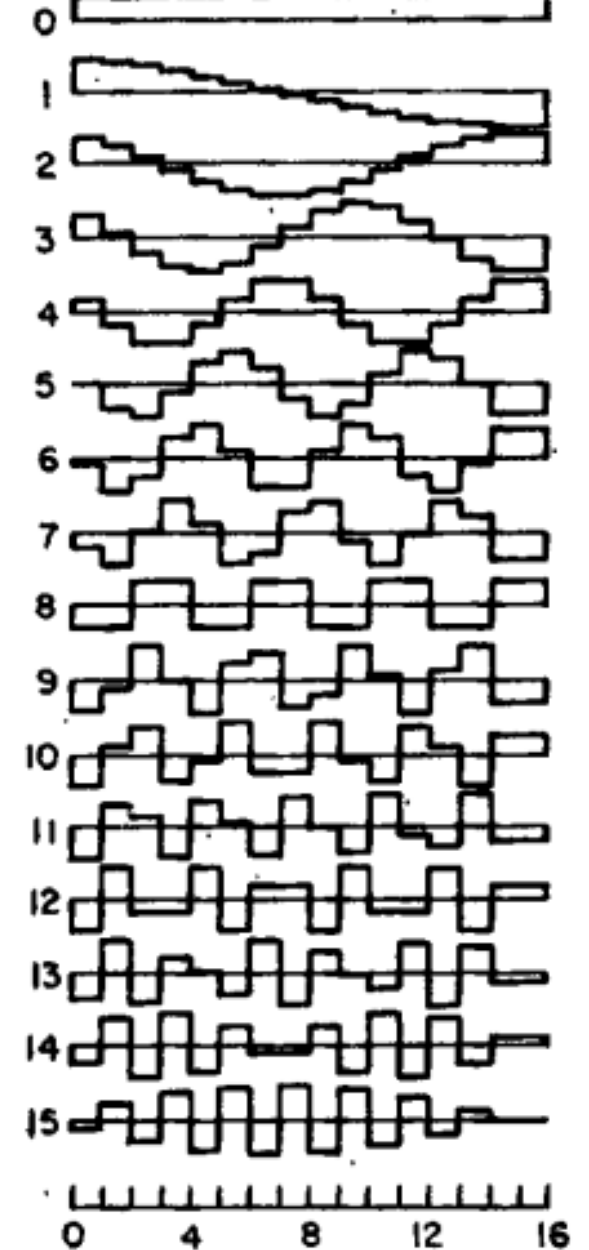
Нечетное симметричное косинусное преобразование

$$\tilde{F}_s(j, k) = \begin{cases} 1/4 F(j, k) & \text{при } j=0, k=0, \\ 1/2 F(j, k) & \text{при } j=0, k \neq 0, \\ 1/2 F(j, k) & \text{при } j \neq 0, k=0, \\ F(j, k) & \text{при } j \neq 0, k \neq 0. \end{cases} \quad F_s(j, k) = \begin{cases} F(j, k) & \text{при } j, k \geq 0, \\ F(-j, k) & \text{при } j < 0, k \geq 0, \\ F(j, -k) & \text{при } j \geq 0, k < 0, \\ F(-j, -k) & \text{при } j, k < 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_s(u, v) = \frac{4}{2N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}(j, k) \cos \left[\frac{2\pi}{2N-1} ju \right] \cos \left[\frac{2\pi}{2N-1} kv \right]$$



Номер
базисной
функции



Ортогональные преобразования

Преобразование Адамара

Нормированная матрица Адамара N -го порядка $\mathbf{H}_N \mathbf{H}_N^T = \mathbf{I}_N$

Матрицы для порядка $N = 2^n$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_N & \mathbf{H}_N \\ \mathbf{H}_N & -\mathbf{H}_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Число
изменений
знака

0

3

1

2

$$\mathbf{H}_8 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Число
изменений
знака

0

7

3

4

1

6

2

5

Номер
базисной
функции

0

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

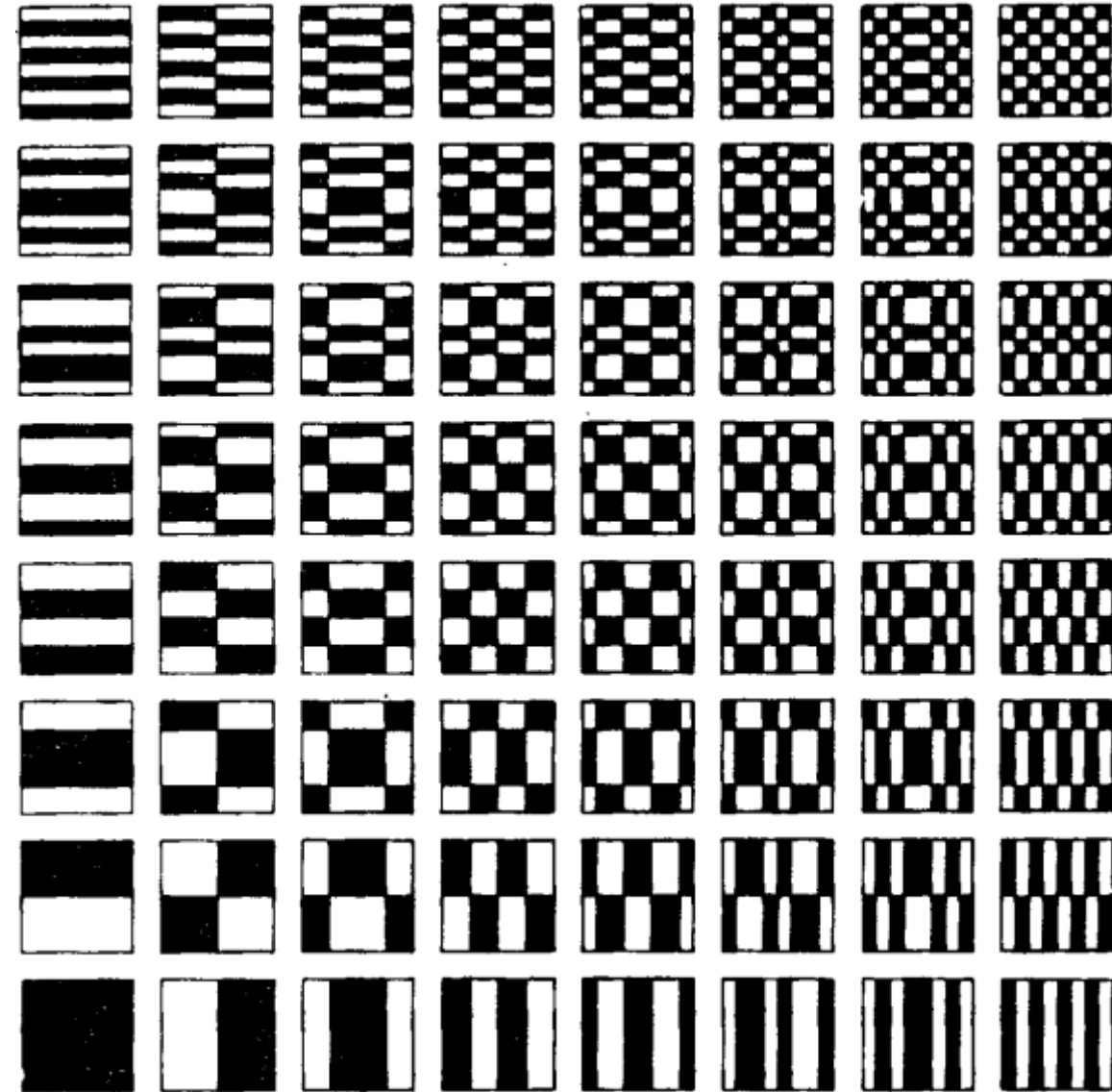
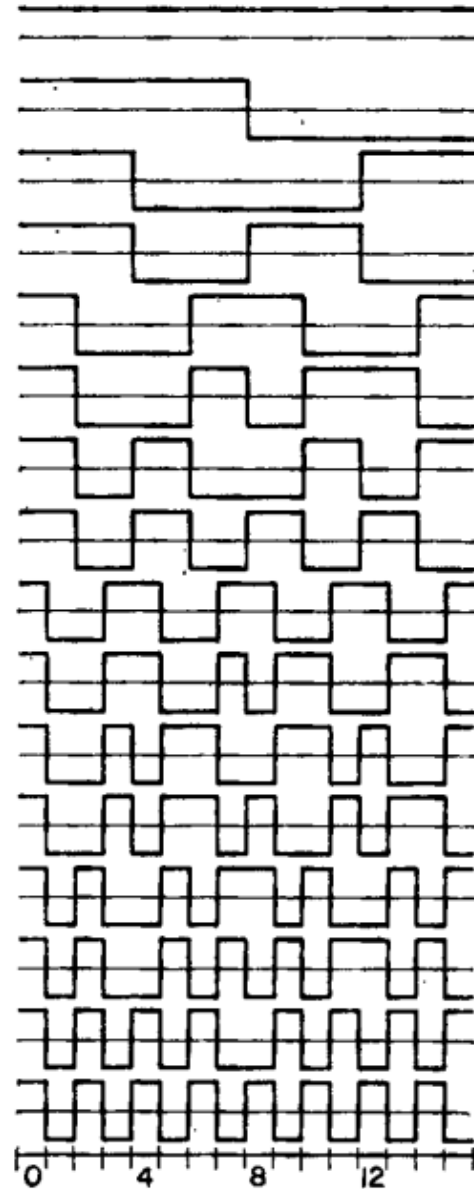
11

12

13

14

15



Ортогональные преобразования

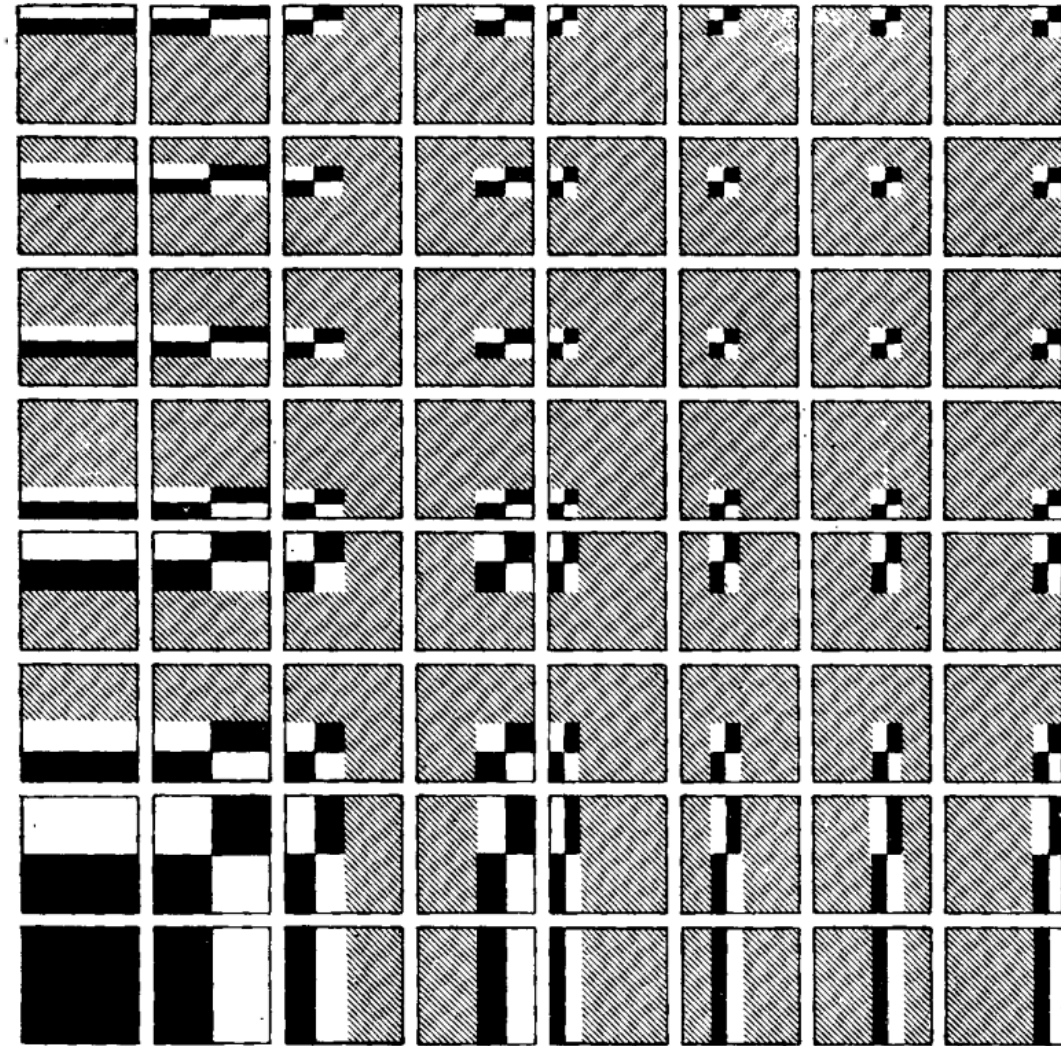
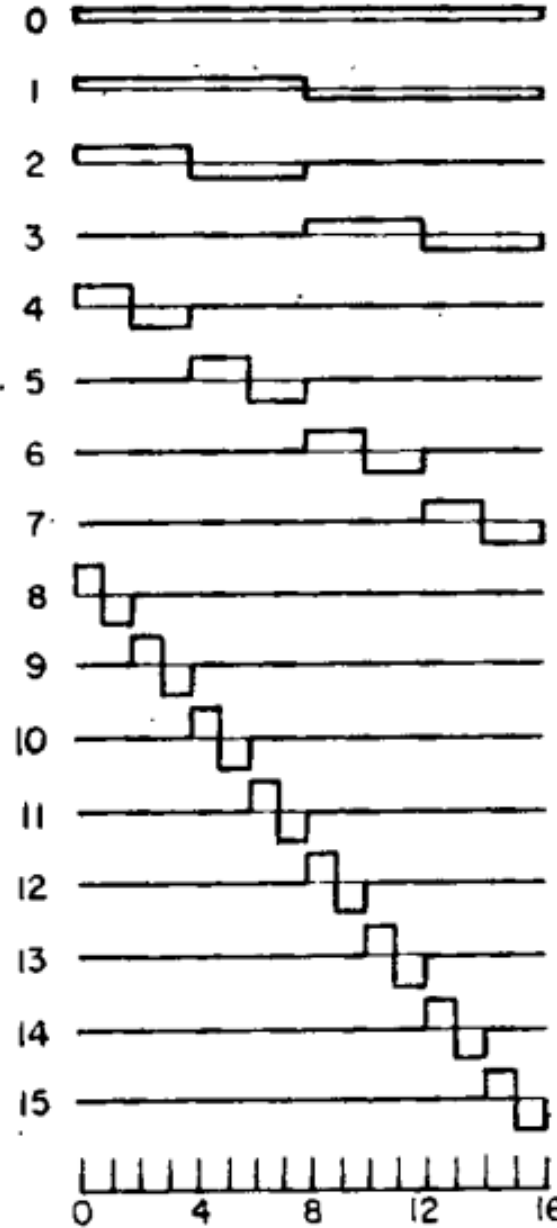
Преобразование Хаара

Матрицы для порядка

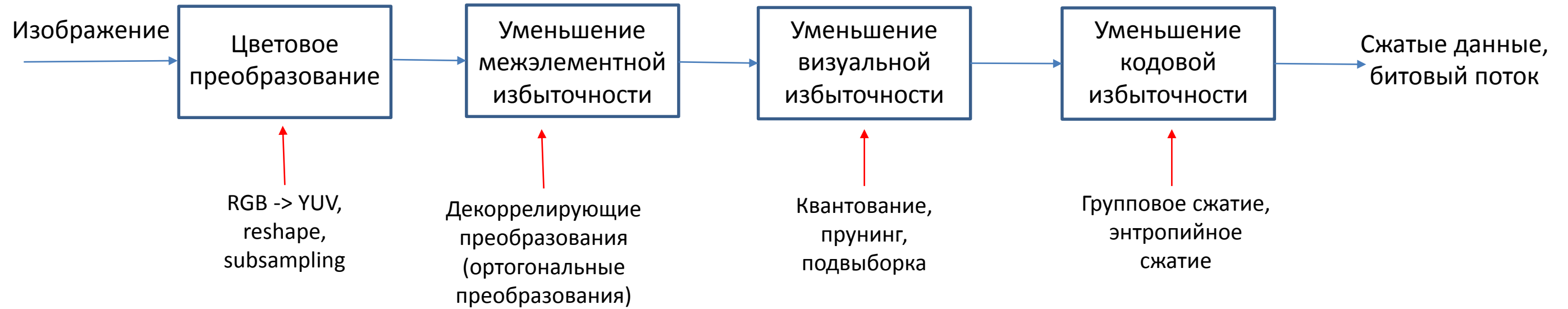
$$H_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$H_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

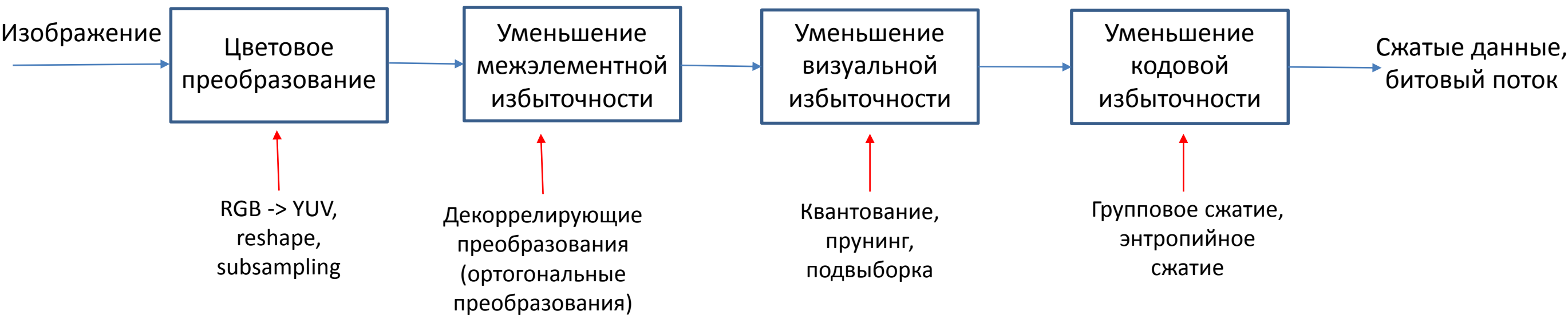
Номер
базисной
функции



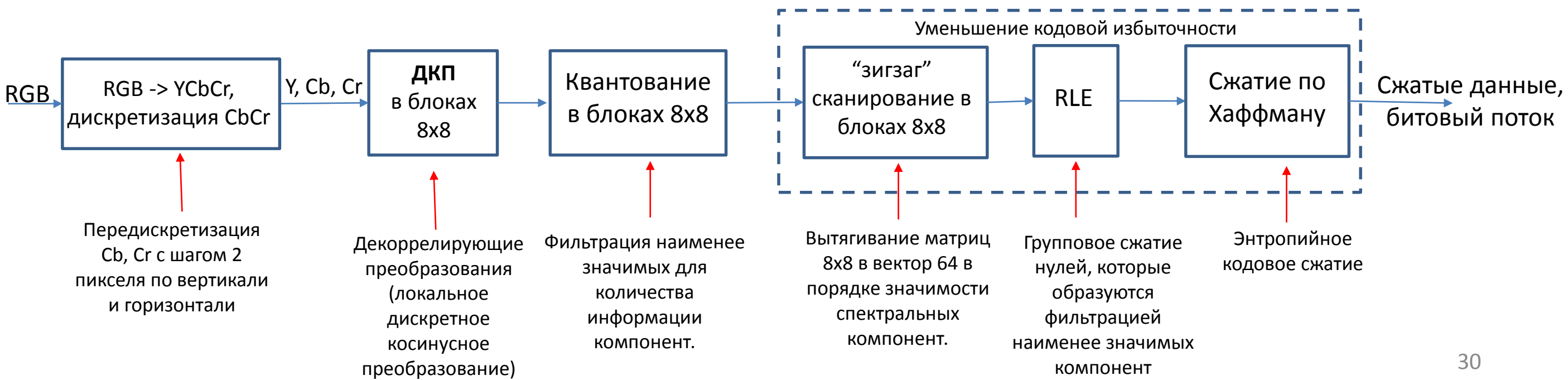
Подходы к сжатию и восстановлению изображения



Подходы к сжатию и восстановлению изображения

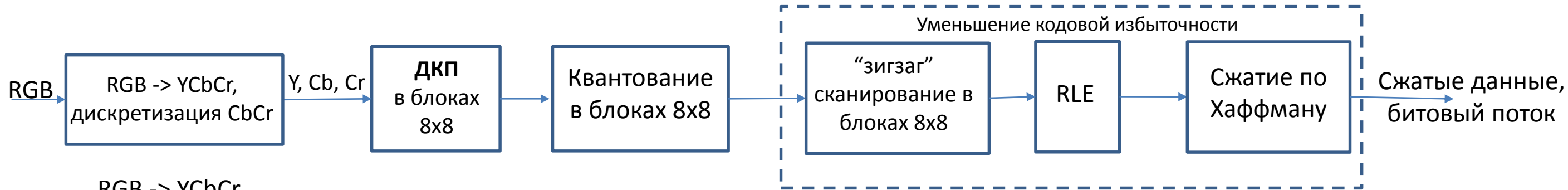


Алгоритм JPEG



Подходы к сжатию и восстановлению изображения

Элементы алгоритма JPEG



$$\begin{bmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.5 & -0.4187 & -0.0813 \\ 0.1687 & -0.3313 & 0.5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{bmatrix}$$

Передискретизация
Cb, Cr с шагом 2
пикселя по вертикали
и горизонтали

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.402 \\ 1 & -0.34414 & -0.71414 \\ 1 & 1.772 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{bmatrix}$$

ДКП

$$Y[u, v] = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^7 \sum_{j=0}^7 C(i, u) \times C(j, v) \times y[i, j],$$

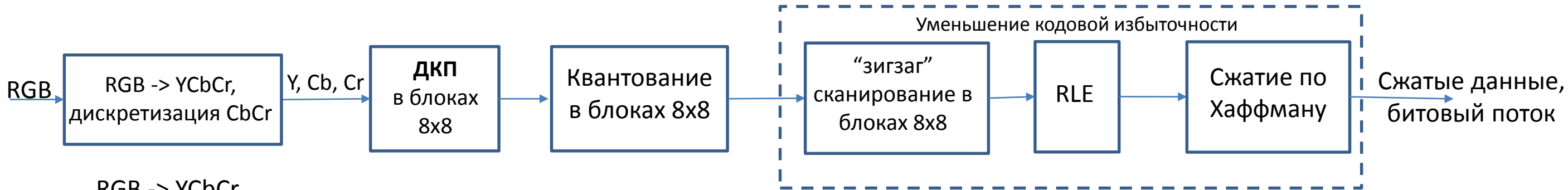
$$C(i, u) = A(u) \times \cos\left(\frac{(2 \times i + 1) \times u \times \pi}{2 \cdot n}\right)$$

$$A(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{for } u \equiv 0, \\ 1, & \text{for } u \neq 0. \end{cases}$$

Декоррелирующие
преобразования
(локальное
дискретное
косинусное
преобразование)

Подходы к сжатию и восстановлению изображения

Элементы алгоритма JPEG



RGB -> YCbCr

$$\begin{bmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.5 & -0.4187 & -0.0813 \\ 0.1687 & -0.3313 & 0.5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{bmatrix}$$

YCbCr -> RGB

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.402 \\ 1 & -0.34414 & -0.71414 \\ 1 & 1.772 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{bmatrix}$$

ДКП

$$Y[u, v] = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^7 \sum_{j=0}^7 C(i, u) \times C(j, v) \times y[i, j],$$

$$C(i, u) = A(u) \times \cos\left(\frac{(2 \times i + 1) \times u \times \pi}{2 \cdot n}\right)$$

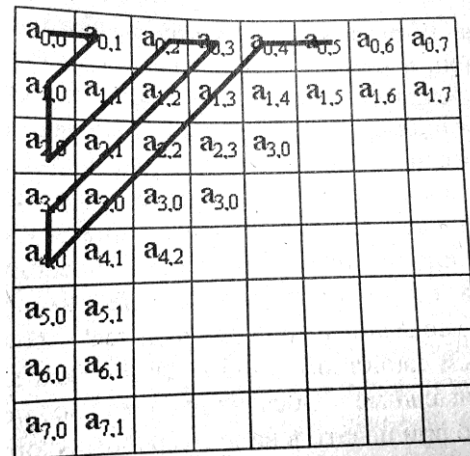
$$A(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{for } u \equiv 0, \\ 1, & \text{for } u \neq 0. \end{cases}$$

Квантование

$$Yq[u, v] = \text{IntegerRound} \left(\frac{Y[u, v]}{q[u, v]} \right)$$

Фильтрация наименее значимых для количества информации компонент.

“зигзаг” сканирование



Вытягивание матриц 8x8 в вектор 64 в порядке значимости спектральных компонент.

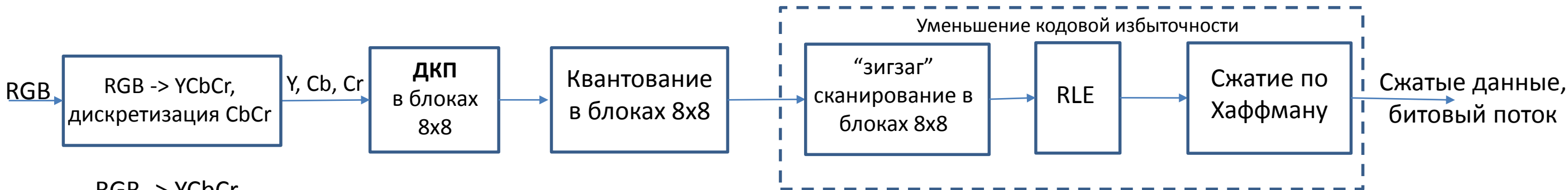
Zero run-length encoding, RLE

(zero_num, next_value), (zero_num, next_value), ...
00000004008 -> (7,4), (2,8)

Групповое сжатие нулей, которые образуются фильтрацией наименее значимых компонент

Подходы к сжатию и восстановлению изображения

Элементы алгоритма JPEG



RGB -> YCbCr

$$\begin{bmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.5 & -0.4187 & -0.0813 \\ 0.1687 & -0.3313 & 0.5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{bmatrix}$$

YCbCr -> RGB

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.402 \\ 1 & -0.34414 & -0.71414 \\ 1 & 1.772 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{bmatrix}$$

ДКП

$$Y[u, v] = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^7 \sum_{j=0}^7 C(i, u) \times C(j, v) \times y[i, j],$$

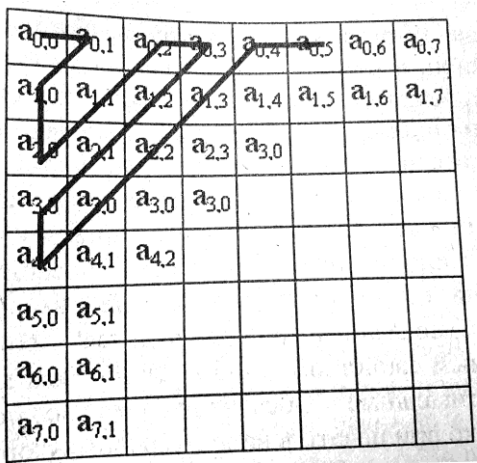
$$C(i, u) = A(u) \times \cos\left(\frac{(2 \times i + 1) \times u \times \pi}{2 \cdot n}\right)$$

$$A(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{for } u \equiv 0, \\ 1, & \text{for } u \neq 0. \end{cases}$$

Квантование

$$Yq[u, v] = \text{IntegerRound} \left(\frac{Y[u, v]}{q[u, v]} \right)$$

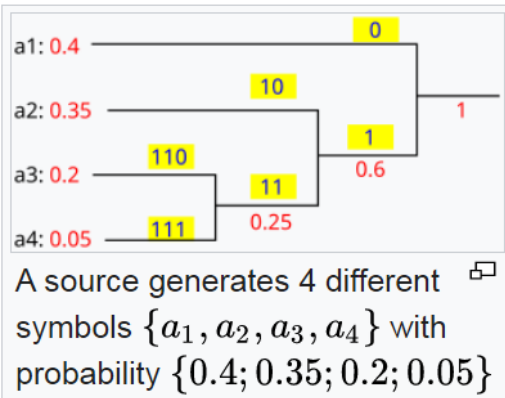
“зигзаг” сканирование



Zero run-length encoding, RLE

(zero_num, next_value), (zero_num, next_value), ...
00000004008 -> (7,4), (2,8)

Энтропийное сжатие по Хаффману



Symbol	Code
a1	0
a2	10
a3	110
a4	111

