

# Линейные методы классификации и регрессии: метод опорных векторов

Воронцов Константин Вячеславович

`k.v.vorontsov@phystech.edu`

`http://www.MachineLearning.ru/wiki?title=User:Vokov`

Этот курс доступен на странице вики-ресурса

`http://www.MachineLearning.ru/wiki`

«Машинное обучение (курс лекций, К.В.Воронцов)»

## 1 Метод опорных векторов SVM

- Принцип оптимальной разделяющей гиперплоскости
- Двойственная задача
- Понятие опорного вектора

## 2 Обобщения линейного SVM

- Ядра и спрямляющие пространства
- SVM как двухслойная нейронная сеть
- SVM-регрессия

## 3 Регуляризация

- Регуляризаторы для отбора признаков
- Методы SFM и RFM
- Метод релевантных векторов RVM

## Задача обучения линейного классификатора

**Дано:**

Обучающая выборка  $X^\ell = (x_i, y_i)_{i=1}^\ell$ ,

$x_i$  — объекты, векторы из множества  $X = \mathbb{R}^n$ ,

$y_i$  — метки классов, элементы множества  $Y = \{-1, +1\}$ .

**Найти:**

Параметры  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $w_0 \in \mathbb{R}$  линейной модели классификации

$$a(x; w, w_0) = \text{sign}(\langle x, w \rangle - w_0).$$

**Критерий** — минимизация эмпирического риска:

$$\sum_{i=1}^{\ell} [a(x_i; w, w_0) \neq y_i] = \sum_{i=1}^{\ell} [M_i(w, w_0) < 0] \rightarrow \min_{w, w_0}.$$

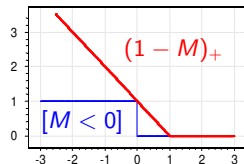
где  $M_i(w, w_0) = (\langle x_i, w \rangle - w_0)y_i$  — отступ (margin) объекта  $x_i$ ,

## Аппроксимация и регуляризация эмпирического риска

Эмпирический риск — это кусочно-постоянная функция.  
 Заменяем его оценкой сверху, непрерывной по параметрам:

$$\begin{aligned}
 Q(w, w_0) &= \sum_{i=1}^{\ell} [M_i(w, w_0) < 0] \leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^{\ell} (1 - M_i(w, w_0))_+ + \frac{1}{2C} \|w\|^2 \rightarrow \min_{w, w_0}.
 \end{aligned}$$

- Аппроксимация штрафует объекты за приближение к границе классов, увеличивая зазор между классами
- Регуляризация штрафует неустойчивые решения в случае мультиколлинеарности



## Оптимальная разделяющая гиперплоскость

Линейный классификатор:  $a(x, w) = \text{sign}(\langle w, x \rangle - w_0)$

Пусть выборка  $X^\ell = (x_i, y_i)_{i=1}^\ell$  линейно разделяема:

$$\exists w, w_0 : M_i(w, w_0) = y_i(\langle w, x_i \rangle - w_0) > 0, \quad i = 1, \dots, \ell$$

Нормировка:  $\min_{i=1, \dots, \ell} M_i(w, w_0) = 1$

Разделяющая полоса (разделяющая гиперплоскость посередине):

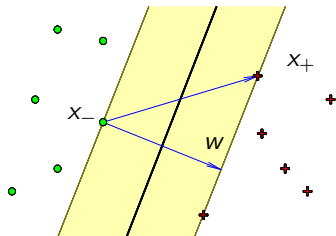
$$\{x : -1 \leq \langle w, x \rangle - w_0 \leq 1\}$$

$$\exists x_+ : \langle w, x_+ \rangle - w_0 = +1$$

$$\exists x_- : \langle w, x_- \rangle - w_0 = -1$$

Ширина полосы:

$$\frac{\langle x_+ - x_-, w \rangle}{\|w\|} = \frac{2}{\|w\|} \rightarrow \max$$



## Обоснование кусочно-линейной функции потерь

Линейно разделимая выборка

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \|w\|^2 \rightarrow \min_{w, w_0}; \\ M_i(w, w_0) \geq 1, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

Переход к линейно неразделимой выборке (эвристика)

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i \rightarrow \min_{w, w_0, \xi}; \\ \xi_i \geq 1 - M_i(w, w_0), \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

Эквивалентная задача безусловной минимизации:

$$C \sum_{i=1}^{\ell} (1 - M_i(w, w_0))_+ + \frac{1}{2} \|w\|^2 \rightarrow \min_{w, w_0}.$$

## Напоминание. Условия Каруша–Куна–Таккера (ККТ)

Задача математического программирования:

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \min_x; \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m; \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Необходимые условия. Если  $x$  — точка локального минимума, то существуют множители  $\mu_i, i = 1, \dots, m, \lambda_j, j = 1, \dots, k$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \mathcal{L}(x; \mu, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(x) + \sum_{j=1}^k \lambda_j h_j(x); \\ g_i(x) \leq 0; \quad h_j(x) = 0; \quad (\text{исходные ограничения}) \\ \mu_i \geq 0; \quad (\text{двойственные ограничения}) \\ \mu_i g_i(x) = 0; \quad (\text{условие дополняющей нежёсткости}) \end{cases}$$

## Применение условий ККТ к задаче SVM

Функция Лагранжа:  $\mathcal{L}(w, w_0, \xi; \lambda, \eta) =$

$$= \frac{1}{2} \|w\|^2 - \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i (M_i(w, w_0) - 1) - \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i (\lambda_i + \eta_i - C),$$

$\lambda_i$  — переменные, двойственные к ограничениям  $M_i \geq 1 - \xi_i$ ;

$\eta_i$  — переменные, двойственные к ограничениям  $\xi_i \geq 0$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_0} = 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = 0; \\ \xi_i \geq 0, & \lambda_i \geq 0, & \eta_i \geq 0, & i = 1, \dots, \ell; \\ \lambda_i = 0 & \text{либо} & M_i(w, w_0) = 1 - \xi_i, & i = 1, \dots, \ell; \\ \eta_i = 0 & \text{либо} & \xi_i = 0, & i = 1, \dots, \ell; \end{cases}$$



## Необходимые условия седловой точки функции Лагранжа

Функция Лагранжа:  $\mathcal{L}(w, w_0, \xi; \lambda, \eta) =$

$$= \frac{1}{2} \|w\|^2 - \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i (M_i(w, w_0) - 1) - \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i (\lambda_i + \eta_i - C),$$

Необходимые условия седловой точки функции Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = w - \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i x_i = 0 \quad \implies \quad w = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i x_i;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_0} = - \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i = 0 \quad \implies \quad \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i = 0;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i} = -\lambda_i - \eta_i + C = 0 \quad \implies \quad \eta_i + \lambda_i = C, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

## Понятие опорного вектора и типизация объектов

Система условий ККТ:

$$\left\{ \begin{array}{l} w = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i x_i; \quad \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i = 0; \quad M_i(w, w_0) \geq 1 - \xi_i; \\ \xi_i \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \eta_i \geq 0, \quad \eta_i + \lambda_i = C; \\ \lambda_i = 0 \text{ либо } M_i(w, w_0) = 1 - \xi_i; \\ \eta_i = 0 \text{ либо } \xi_i = 0; \end{array} \right.$$

**Определение.** Объект  $x_i$  называется *опорным*, если  $\lambda_i \neq 0$ .

Типизация объектов  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ :

1.  $\lambda_i = 0$ ;  $\eta_i = C$ ;  $\xi_i = 0$ ;  $M_i \geq 1$  — периферийный.
2.  $0 < \lambda_i < C$ ;  $0 < \eta_i < C$ ;  $\xi_i = 0$ ;  $M_i = 1$  — **опорный**-граничный
3.  $\lambda_i = C$ ;  $\eta_i = 0$ ;  $\xi_i > 0$ ;  $M_i < 1$  — **опорный**-нарушитель

## Двойственная задача

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathcal{L}(\lambda) = -\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_i \lambda_j y_i y_j \langle x_i, x_j \rangle \rightarrow \min_{\lambda}; \\ \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i = 0; \quad 0 \leq \lambda_i \leq C, \quad i = 1, \dots, \ell \end{array} \right.$$

Решение прямой задачи выражается через решение двойственной:

$$\left\{ \begin{array}{l} w = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i x_i; \\ w_0 = \langle w, x_i \rangle - y_i, \quad \text{для любого } i: \lambda_i > 0, \quad M_i = 1. \end{array} \right.$$

Линейный классификатор с признаками  $f_i(x) = \langle x, x_i \rangle$ :

$$a(x) = \text{sign} \left( \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i \langle x, x_i \rangle - w_0 \right).$$

*S.Fine, K.Scheinberg.* INCAS: An incremental active set method for SVM. 2002.

*J.Platt.* Fast training support vector machines using sequential minimal optimization. 1999.

## Двойственная задача. Нелинейное обобщение с ядром $K$

$$\begin{cases} -\mathcal{L}(\lambda) = -\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_i \lambda_j y_i y_j K(x_i, x_j) \rightarrow \min_{\lambda} \\ \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i = 0; \quad 0 \leq \lambda_i \leq C, \quad i = 1, \dots, \ell \end{cases}$$

Решение прямой задачи выражается через решение двойственной:

$$\begin{cases} w = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i x_i \\ w_0 = \langle w, x_i \rangle - y_i, \quad \text{для любого } i: \lambda_i > 0, \quad M_i = 1. \end{cases}$$

Линейный классификатор с признаками  $f_i(x) = K(x, x_i)$ :

$$a(x) = \text{sign} \left( \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i K(x, x_i) - w_0 \right).$$

*S.Fine, K.Scheinberg.* INCAS: An incremental active set method for SVM. 2002.

*J.Platt.* Fast training support vector machines using sequential minimal optimization. 1999.

## Нелинейное обобщение SVM

**Идея:** заменить  $\langle x, x' \rangle$  нелинейной функцией  $K(x, x')$ .

Переход к спрямляющему пространству,  
как правило, более высокой размерности:  $\psi: X \rightarrow H$ .

### Определение

Функция  $K: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  — *ядро*, если  $K(x, x') = \langle \psi(x), \psi(x') \rangle$  при некотором  $\psi: X \rightarrow H$ , где  $H$  — гильбертово пространство.

### Теорема

Функция  $K(x, x')$  является ядром тогда и только тогда, когда она симметрична:  $K(x, x') = K(x', x)$ ;  
и неотрицательно определена:

$$\int_X \int_X K(x, x') g(x) g(x') dx dx' \geq 0 \text{ для любой } g: X \rightarrow \mathbb{R}.$$

## Конструктивные методы синтеза ядер

- 1  $K(x, x') = \langle x, x' \rangle$  — ядро;
- 2 константа  $K(x, x') = 1$  — ядро;
- 3 произведение ядер  $K(x, x') = K_1(x, x')K_2(x, x')$  — ядро;
- 4  $\forall \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$  произведение  $K(x, x') = \psi(x)\psi(x')$  — ядро;
- 5  $K(x, x') = \alpha_1 K_1(x, x') + \alpha_2 K_2(x, x')$  при  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  — ядро;
- 6  $\forall \varphi : X \rightarrow X$  если  $K_0$  ядро, то  $K(x, x') = K_0(\varphi(x), \varphi(x'))$  — ядро;
- 7 если  $s : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  — симметричная интегрируемая функция, то  $K(x, x') = \int_X s(x, z)s(x', z) dz$  — ядро;
- 8 если  $K_0$  — ядро и функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  представима в виде сходящегося степенного ряда с неотрицательными коэффициентами, то  $K(x, x') = f(K_0(x, x'))$  — ядро;

## Пример: спрямляющее пространство для квадратичного ядра

Пусть  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $K(u, v) = \langle u, v \rangle^2$ , где  $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2)$ .

**Задача:** найти пространство  $H$  и преобразование  $\psi: X \rightarrow H$ , при которых  $K(x, x') = \langle \psi(x), \psi(x') \rangle_H$ .

Разложим квадрат скалярного произведения:

$$\begin{aligned} K(u, v) &= \langle u, v \rangle^2 = \langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle^2 = \\ &= (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 = u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + 2u_1 v_1 u_2 v_2 = \\ &= \langle (u_1^2, u_2^2, \sqrt{2}u_1 u_2), (v_1^2, v_2^2, \sqrt{2}v_1 v_2) \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$H = \mathbb{R}^3, \quad \psi: (u_1, u_2) \mapsto (u_1^2, u_2^2, \sqrt{2}u_1 u_2),$$

Линейной поверхности в пространстве  $H$  соответствует квадратичная поверхность в исходном пространстве  $X$ .

## Примеры ядер

- 1 квадратичное ядро,  $\dim H = \frac{1}{2}n(n+1)$

$$K(x, x') = \langle x, x' \rangle^2$$

- 2 полиномиальное с мономами степени  $d$ ,  $\dim H = C_{n+d-1}^d$

$$K(x, x') = \langle x, x' \rangle^d$$

- 3 полиномиальное с мономами степени  $\leq d$

$$K(x, x') = (\langle x, x' \rangle + 1)^d$$

- 4 нейросеть с сигмоидными функциями активации

$$K(x, x') = \text{th}(k_1 \langle x, x' \rangle - k_0), \quad k_0, k_1 \geq 0$$

- 5 сеть радиальных базисных функций (RBF ядро)

$$K(x, x') = \exp(-\gamma \|x - x'\|^2)$$

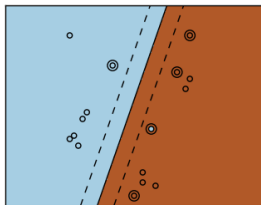


## Классификация с различными ядрами

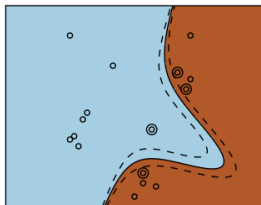
Гиперплоскость в спрямляющем пространстве соответствует нелинейной разделяющей поверхности в исходном.

Примеры с различными ядрами  $K(x, x')$

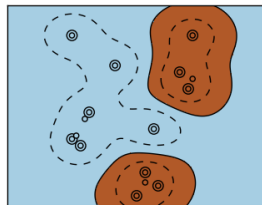
линейное  
 $\langle x, x' \rangle$



полиномиальное  
 $(\langle x, x' \rangle + 1)^d, d=3$



гауссовское (RBF)  
 $\exp(-\gamma \|x - x'\|^2)$



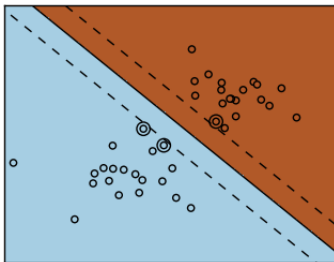
Пример из Python SkLearn: <http://scikit-learn.org/dev>

## Влияние константы $C$ на решение SVM

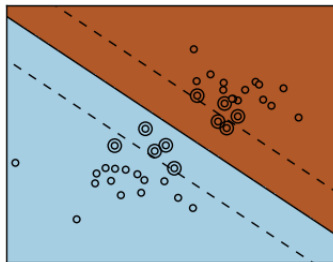
SVM — аппроксимация и регуляризация эмпирического риска:

$$\sum_{i=1}^{\ell} (1 - M_i(w, w_0))_+ + \frac{1}{2C} \|w\|^2 \rightarrow \min_{w, w_0}$$

большой  $C$   
слабая регуляризация



малый  $C$   
сильная регуляризация

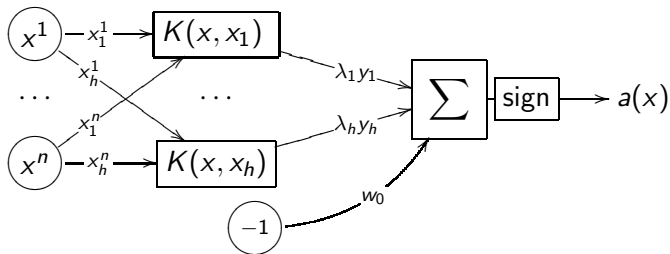


Пример из Python SkLearn: <http://scikit-learn.org/dev>

## SVM: двухслойная нейросеть и метрический классификатор

Перенумеруем объекты так, чтобы  $x_1, \dots, x_h$  были опорными.

$$a(x) = \text{sign} \left( \sum_{i=1}^h \lambda_i y_i K(x, x_i) - w_0 \right).$$



Первый слой вместо скалярных произведений вычисляет ядра  
 Веса первого слоя — это сами опорные объекты  
 Метрический классификатор, если  $K$  — функция близости

## Преимущества и недостатки SVM

Преимущества SVM перед двухслойными нейронными сетями:

- задача выпуклого квадратичного программирования имеет единственное решение
- число нейронов скрытого слоя определяется автоматически — это число опорных векторов

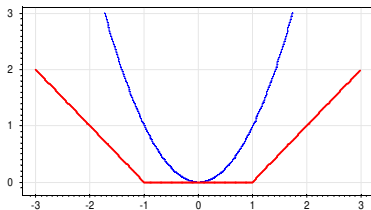
Недостатки классического SVM:

- нет общих подходов к оптимизации  $K(x, x')$  под задачу
- на больших данных SVM обучается медленнее SG
- нет «встроенного» отбора признаков
- приходится подбирать константу  $C$

## SVM-регрессия

Модель регрессии:  $a(x) = \langle x, w \rangle - w_0$ ,  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $w_0 \in \mathbb{R}$ .

Функция потерь:  $\mathcal{L}(\varepsilon) = (|\varepsilon| - \delta)_+$  в сравнении с  $\mathcal{L}(\varepsilon) = \varepsilon^2$ :



Постановка задачи:

$$\sum_{i=1}^{\ell} (|\langle w, x_i \rangle - w_0 - y_i| - \delta)_+ + \frac{1}{2C} \|w\|^2 \rightarrow \min_{w, w_0}.$$

Задача решается путём замены переменных  
 и сведения к задаче квадратичного программирования

## SVM-регрессия

Замена переменных:

$$\begin{aligned}\xi_i^+ &= (\langle w, x_i \rangle - w_0 - y_i - \delta)_+; \\ \xi_i^- &= (-\langle w, x_i \rangle + w_0 + y_i - \delta)_+;\end{aligned}$$

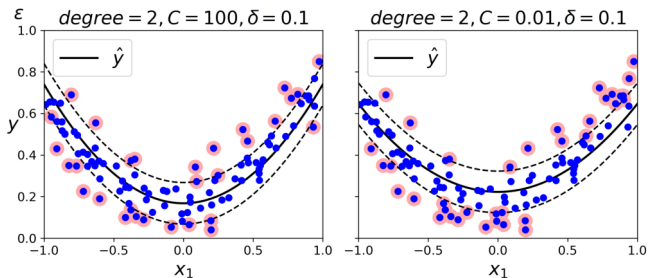
Постановка задачи SVM-регрессии:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^{\ell} (\xi_i^+ + \xi_i^-) \rightarrow \min_{w, w_0, \xi^+, \xi^-}; \\ y_i - \delta - \xi_i^- \leq \langle w, x_i \rangle - w_0 \leq y_i + \delta + \xi_i^+, \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \xi_i^- \geq 0, \quad \xi_i^+ \geq 0, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

- выпуклая задача квадратичного программирования
- решение единственно
- решение выражается через опорные векторы
- возможна замена  $\langle x, x_i \rangle$  ядром  $K(x, x_i)$

## SVM-регрессия. Пример 1

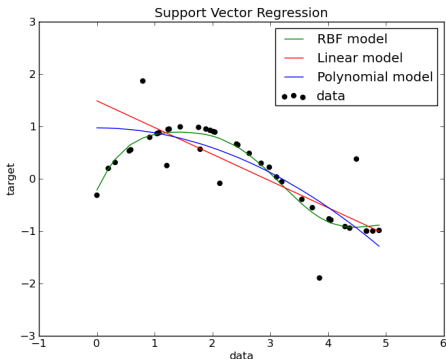
SVM-регрессия с полиномиальным ядром степени 2:



- Выделены опорные векторы
- Результат слабо зависит от константы  $C$

## SVM-регрессия. Пример 2

Сравнение SVM-регрессии с гауссовским (RBF) ядром, линейной и полиномиальной регрессией:



- Удачный выбор ядра имеет значение!



## 1-norm SVM (LASSO SVM)

Аппроксимация эмпирического риска с  $L_1$ -регуляризацией:

$$\sum_{i=1}^{\ell} (1 - M_i(w, w_0))_+ + \mu \sum_{j=1}^n |w_j| \rightarrow \min_{w, w_0}.$$

- ⊕ Отбор признаков с параметром *селективности*  $\mu$ :  
чем больше  $\mu$ , тем меньше признаков останется
- ⊖ По мере увеличения  $\mu$  значимые признаки могут отбрасываться, когда ещё не все шумовые отброшены
- ⊖ Нет *эффекта группировки* (grouping effect):  
значимые зависимые признаки должны отбираться вместе и иметь примерно равные веса  $w_j$

---

Bradley P., Mangasarian O. Feature selection via concave minimization and support vector machines // ICML 1998.

## 1-norm SVM (LASSO SVM)

Аппроксимация эмпирического риска с  $L_1$ -регуляризацией:

$$\sum_{i=1}^{\ell} (1 - M_i(w, w_0))_+ + \mu \sum_{j=1}^n |w_j| \rightarrow \min_{w, w_0}.$$

Почему  $L_1$ -регуляризатор приводит к отбору признаков?

Замена переменных:  $u_j = \frac{1}{2}(|w_j| + w_j)$ ,  $v_j = \frac{1}{2}(|w_j| - w_j)$ .

Тогда  $w_j = u_j - v_j$  и  $|w_j| = u_j + v_j$ ;

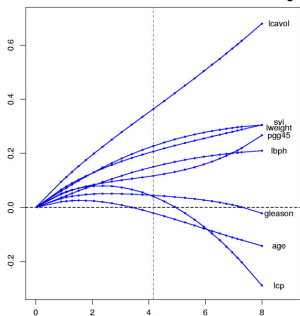
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\ell} (1 - M_i(u - v, w_0))_+ + \mu \sum_{j=1}^n (u_j + v_j) \rightarrow \min_{u, v} \\ u_j \geq 0, \quad v_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n; \end{cases}$$

чем больше  $\mu$ , тем больше индексов  $j$  таких, что  $u_j = v_j = 0$ , но тогда  $w_j = 0$ , значит, **признак не учитывается**.

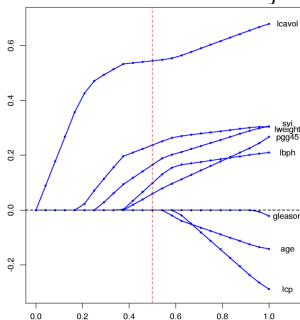
## Сравнение $L_2$ и $L_1$ регуляризации

Зависимость весов  $w_j$  от коэффициента  $\frac{1}{\mu}$

$L_2$  регуляризатор:  $\mu \sum_j w_j^2$



$L_1$  регуляризатор:  $\mu \sum_j |w_j|$



Задача из UCI: prostate cancer (диагностика рака)

*T.Hastie, R.Tibshirani, J.Friedman. The Elements of Statistical Learning. 2001.*

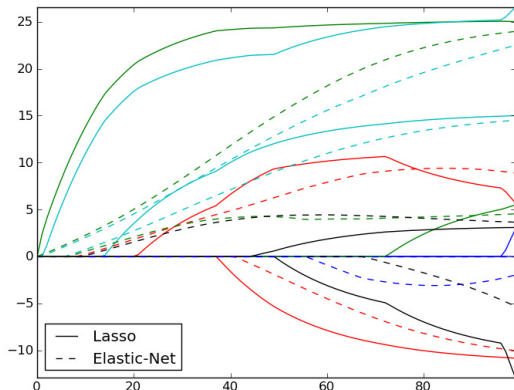
## Doubly Regularized SVM (Elastic Net SVM)

$$C \sum_{i=1}^{\ell} (1 - M_i(w, w_0))_+ + \mu \sum_{j=1}^n |w_j| + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n w_j^2 \rightarrow \min_{w, w_0} .$$

- ⊕ Отбор признаков с параметром *селективности*  $\mu$ :  
чем больше  $\mu$ , тем меньше признаков останется
- ⊕ Есть эффект группировки
- ⊖ Шумовые признаки также группируются вместе;  
по мере увеличения  $\mu$  группы значимых признаков могут  
отбрасываться, когда ещё не все шумовые отброшены

## Doubly Regularized SVM (Elastic Net SVM)

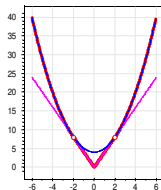
Elastic Net менее жёстко отбирает признаки.  
 Зависимости весов  $w_j$  от коэффициента  $\log \frac{1}{\mu}$ :



## Support Features Machine (SFM)

$$C \sum_{i=1}^{\ell} (1 - M_i(w, w_0))_+ + \sum_{j=1}^n R_{\mu}(w_j) \rightarrow \min_{w, w_0}$$

$$R_{\mu}(w_j) = \begin{cases} 2\mu|w_j|, & |w_j| \leq \mu \\ \mu^2 + w_j^2, & |w_j| \geq \mu \end{cases}$$



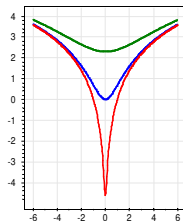
- ⊕ Отбор признаков с параметром *селективности*  $\mu$
- ⊕ Есть эффект группировки
- ⊕ Значимые зависимые признаки ( $|w_j| > \mu$ ) группируются и входят в решение совместно (как в Elastic Net),
- ⊕ Шумовые признаки ( $|w_j| < \mu$ ) не группируются и подавляются независимо друг от друга (как в LASSO)

Tatarchuk A., Urlov E., Mottl V., Windridge D. A support kernel machine for supervised selective combining of diverse pattern-recognition modalities. 2010.

## Relevance Features Machine (RFM)

$$C \sum_{i=1}^{\ell} (1 - M_i(w, w_0))_+ + \sum_{j=1}^n \ln(w_j^2 + \frac{1}{\mu}) \rightarrow \min_{w, w_0}$$

$$R(w) = \ln(w^2 + \frac{1}{\mu}) \text{ при } \mu = 0.1, 1, 100$$



- ⊕ Отбор признаков с параметром *селективности*  $\mu$ :  
чем больше  $\mu$ , тем меньше признаков останется
- ⊕ Есть эффект группировки
- ⊕ Лучше отбирает набор значимых признаков, когда они только совместно обеспечивают хорошее решение

*Tatarchuk A., Mottl V., Eliseyev A., Windridge D.* Selectivity supervision in combining pattern recognition modalities by feature- and kernel-selective Support Vector Machines. 2008.

## Метод релевантных векторов RVM (Relevance Vector Machine)

Положим, как и в SVM, при некоторых  $\lambda_i \geq 0$

$$w = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i x_i,$$

причём опорным векторам  $x_i$  соответствуют  $\lambda_i \neq 0$ .

**Проблема:** Какие из коэффициентов  $\lambda_i$  лучше обнулить?

**Идея:** пусть регуляризатор зависит не от  $w$ , а от  $\lambda_i$ .

Пусть  $\lambda_i$  независимые, гауссовские, с дисперсиями  $\alpha_i$ :

$$p(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2} \sqrt{\alpha_1 \cdots \alpha_\ell}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{\ell} \frac{\lambda_i^2}{2\alpha_i}\right);$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} (1 - M_i(w(\lambda), w_0))_+ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \left(\ln \alpha_i + \frac{\lambda_i^2}{\alpha_i}\right) \rightarrow \min_{\lambda, \alpha}.$$



## Преимущества и недостатки RVM

### Преимущества:

- ⊕ Опорных векторов, как правило, меньше (более «разреженное» решение).
- ⊕ Шумовые выбросы уже не входят в число опорных.
- ⊕ Не надо искать параметр регуляризации (вместо этого  $\alpha$ ; оптимизируются в процессе обучения).
- ⊕ Аналогично SVM, можно использовать ядра.

### Недостатки:

- ⊖ Не всегда есть преимущество по качеству классификации.

---

*M. E. Tipping*. The relevance vector machine. 2000.

*C. M. Bishop, M. E. Tipping*. Variational relevance vector machine. 2000

- *SVM* — лучший метод линейной классификации
- С помощью *ядер* (kernel trick) SVM изящно обобщается для нелинейной классификации и нелинейной регрессии
- *Аппроксимация пороговой функции потерь*  $\mathcal{L}(M)$  увеличивает зазор и повышает надёжность классификации
- *Регуляризация* увеличивает зазор, устраняет мультиколлинеарность и уменьшает переобучение
- *Негладкость функции потерь* приводит к отбору объектов
- *Негладкость регуляризатора* приводит к отбору признаков

---

*В. Н. Вапник, А. Я. Лернер. Узнавание образов при помощи обобщенных портретов. 1963.*

*C. Cortes, V. Vapnik. Support vector networks. 1995.*