Коллаборативная фильтрация и матричные разложения

К. В. Воронцов
vokov@forecsys.ru

Этот курс доступен на странице вики-ресурса
http://www.MachineLearning.ru/wiki
«Машинное обучение (курс лекций, К.В.Воронцов)»

ШАД Яндекс • 15 октября 2019

Содержание

Определения и обозначения

U — множество субъектов (users/пользователей/клиентов);
I — множество объектов (items/предметов/товаров/ресурсов);
Y — пространство описаний транзакций;
$D = (u_t, i_t, y_t)_{t=1}^m \in U \times I \times Y$ — транзакционные данные;

Агрегированные данные:

$R = \|r_{ui}\|$ — матрица кросс-табуляции размера $|U| \times |I|$,
где $r_{ui} = \text{aggr}\{(u_t, i_t, y_t) \in D \mid u_t = u,\ i_t = i\}$

Задачи:

- прогнозирование незаполненных ячеек r_{ui};
- оценивание сходства: $\rho(u, u')$, $\rho(i, i')$, $\rho(u, i)$;
- формирование списка рекомендаций для u или для i.

Пример 1. Рекомендательная система для e-commerce

U — клиенты интернет-магазина;
I — товары (книги, видео, музыка, и т.п.);
$r_{ui} = [\text{клиент } u \text{ купил товар } i]$;

Задачи персонализации предложений:

- выдать оценку товара i для клиента u;
- выдать клиенту u список рекомендуемых товаров;
- предложить совместную покупку (cross-selling);
- информировать клиента о новом товаре (up-selling);
- сегментировать клиентскую базу;
  выделить интересы клиентов (найти целевые аудитории).

Примеры:

http://amazon.com, http://ozon.ru, http://netflix.com

Пример 2. Рекомендательная система для web-страниц

U — пользователи Интернет;
I — страницы (сайты, документы, новости, и т.п.);
$r_{ui} = [\text{пользователь } u \text{ посетил страницу } i]$;

Основная гипотеза Web Usage Mining:

- Посещения пользователя характеризуют его интересы, вкусы, привычки, возможности.

Задачи персонализации предложений:

- для пользователя u:
  — выдать оценку страницы i;
  — выдать ранжированный список рекомендуемых страниц;
- для страницы i: выдать список страниц, близких к i.

Пример: http://SurfingBird.ru

Пример 3. Рекомендательная система на основе рейтингов

U — клиенты интернет-магазина;

I — товары (книги, видео, музыка, и т.п.);

r_{ui} = рейтинг, который клиент u выставил товару i;

Задачи персонализации предложений — те же.

Пример: конкурс Netflix [www.netflixprize.com]

- 2 октября 2006 — 21 сентября 2009; главный приз — $\$10^6$;
- $|U| = 0.48 \cdot 10^6$; $|I| = 17 \cdot 10^3$;
- 10^8 рейтингов $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- точность прогнозов оценивается по тестовой выборке D':

$$\text{RMSE}^2 = \frac{1}{|D'|} \sum_{(u,i) \in D'} \left(r_{ui} - \hat{r}_{ui}\right)^2;$$

- задача: уменьшить RMSE с 0.9514 до 0.8563 (на 10%).

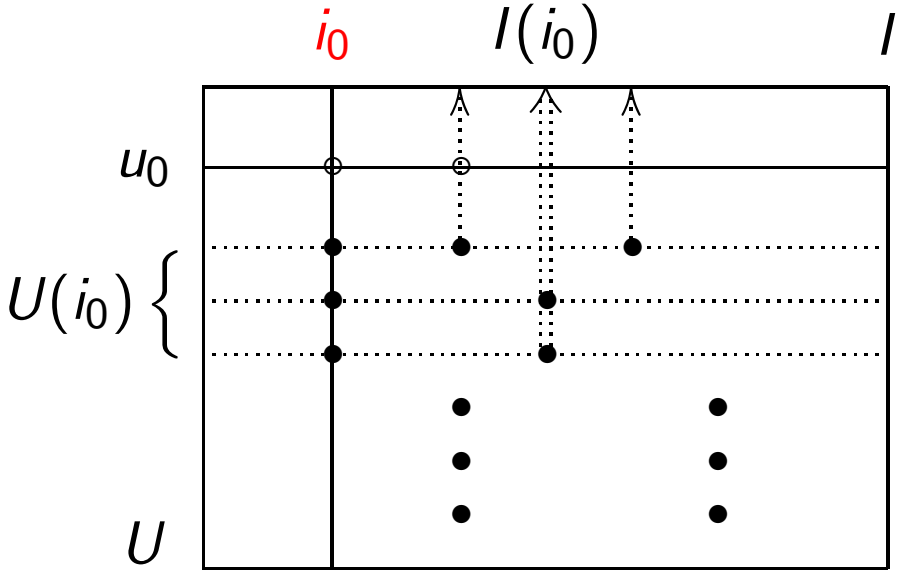
Два основных подхода в коллаборативной фильтрации

1. **Корреляционные модели**
   (Memory-Based Collaborative Filtering)
   - хранение всей исходной матрицы данных R
   - сходство клиентов — корреляция строк матрицы R
   - сходство объектов — корреляция столбцов матрицы R

2. **Латентные модели**
   (Latent Models for Collaborative Filtering)
   - оценивание профилей клиентов и объектов
     (*профиль — это вектор скрытых характеристик*)
   - хранение профилей вместо хранения R
   - сходство клиентов и объектов — сходство их профилей

Тривиальная рекомендательная система

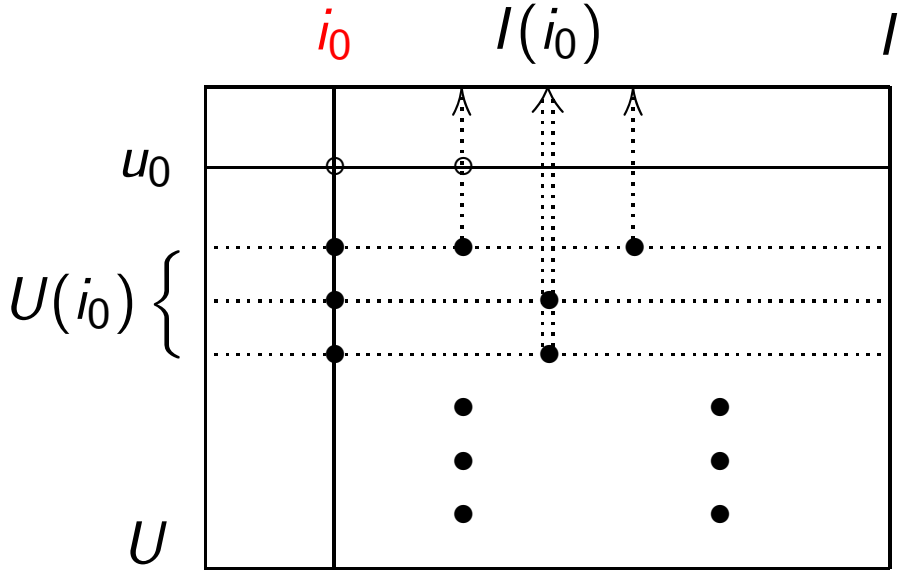
«клиенты, купившие i_0, также покупали $I(i_0)$» [Amazon.com]



1. $U(i_0) := \{u \in U \mid r_{ui_0} \neq \varnothing,\ u \neq u_0\}$ — *коллаборация*;
2. $I(i_0) := \left\{i \in I \;\middle|\; \text{sim}(i, i_0) = \frac{|U(i_0) \cap U(i)|}{|U(i_0) \cup U(i)|} > \delta\right\}$,
   где $\text{sim}(i, i_0)$ — одна из возможных мер сходства i и i_0;
3. отсортировать $I(i_0)$ по убыванию $\text{sim}(i, i_0)$, взять top N.

Тривиальная рекомендательная система

«клиенты, купившие i_0, также покупали $I(i_0)$»
[Amazon.com]

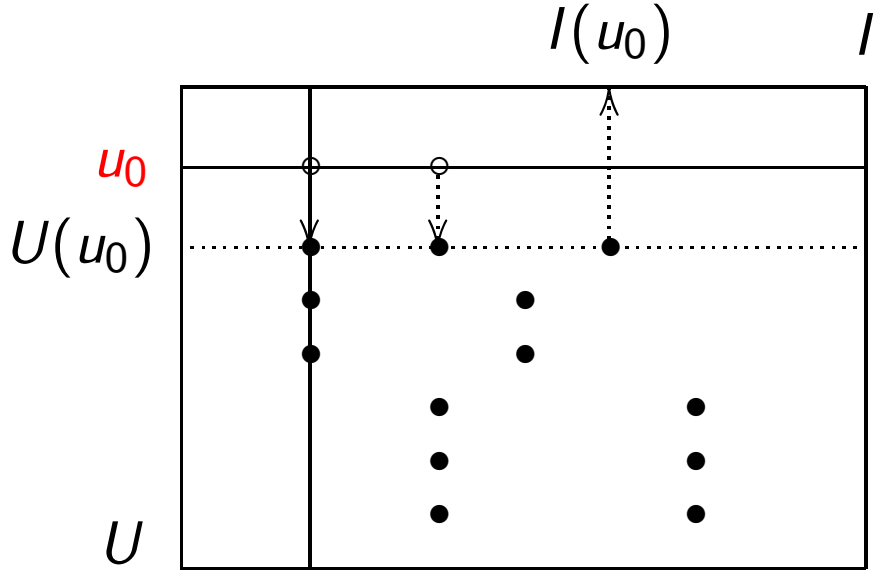


Недостатки:

- рекомендации тривиальны
  (предлагается всё наиболее популярное);
- не учитываются интересы конкретного пользователя u_0;
- проблема «холодного старта»;
  (новый товар никому не рекомендуется)
- надо хранить всю матрицу R.

От клиента (user-based CF)

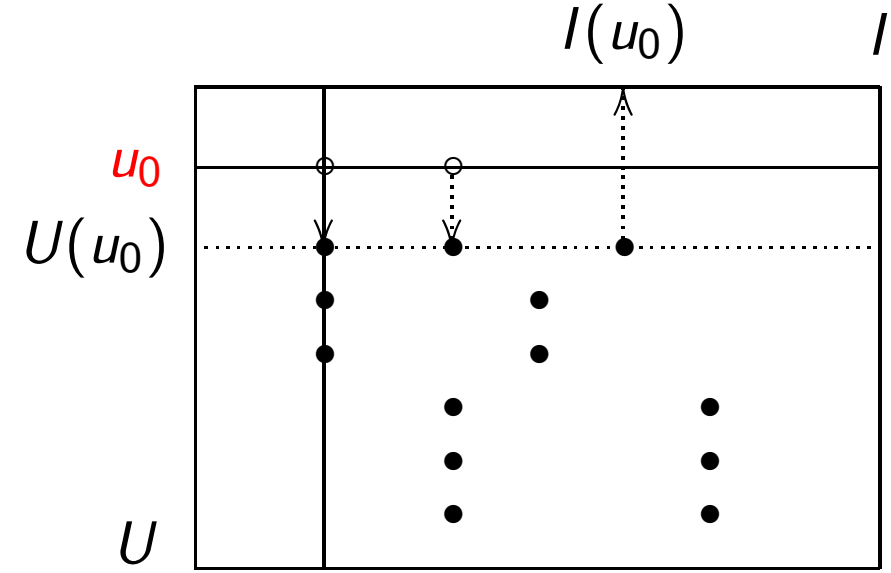
«клиенты, похожие на u_0, также покупали $I(u_0)$»



1. $U(u_0) := \{u \in U \mid \text{sim}(u_0, u) > \alpha\}$ — *коллаборация*;
   $\text{sim}(u_0, u)$ — одна из возможных мер близости u к u_0;
2. $I(u_0) := \left\{i \in I \;\middle|\; B(i) = \frac{|U(u_0) \cap U(i)|}{|U(u_0) \cup U(i)|} > 0\right\}$;
   где $U(i) := \{u \in U \mid r_{ui} \neq \varnothing\}$;
3. отсортировать $i \in I(u_0)$ по убыванию $B(i)$, взять top N;

От клиента (user-based CF)

«клиенты, похожие на u_0, также покупали $I(u_0)$»

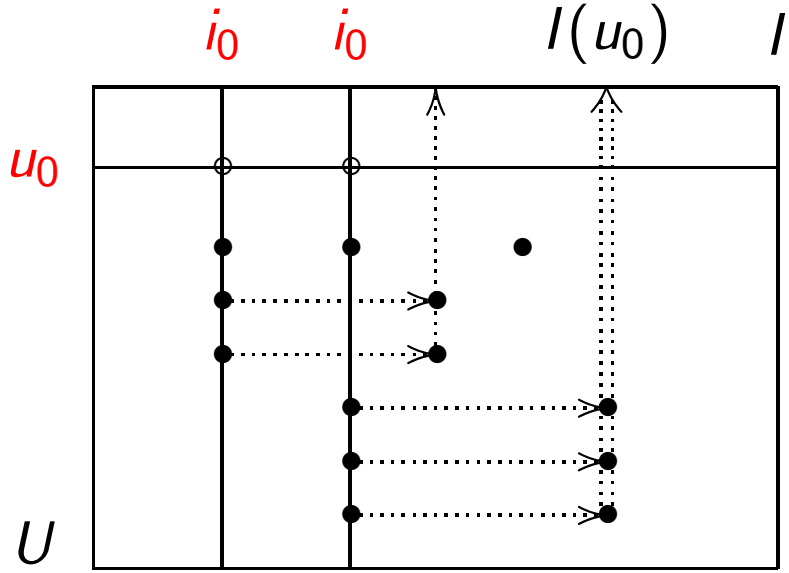


Недостатки:

- ~~рекомендации тривиальны~~;
- ~~не учитываются интересы конкретного пользователя u_0~~;
- проблема «холодного старта»;
- надо хранить всю матрицу R;
- нечего рекомендовать нетипичным/новым пользователям.

От объекта (item-based CF)

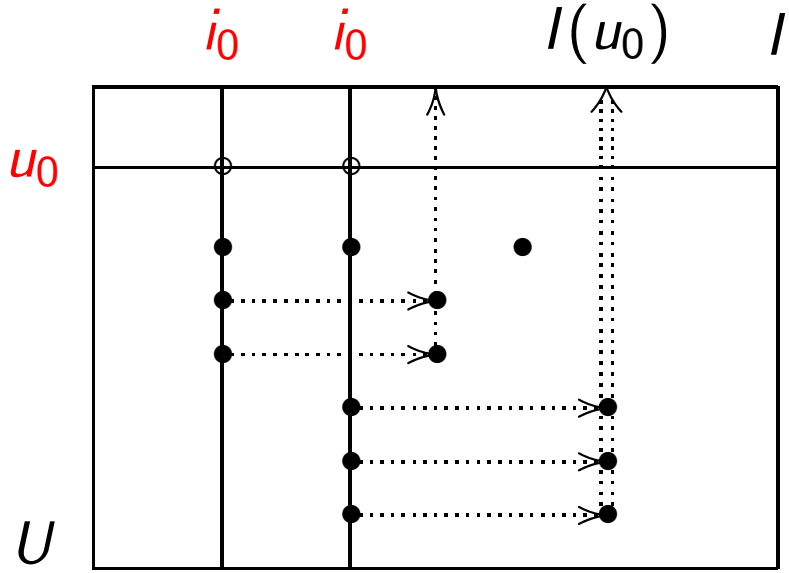
«вместе с объектами,
которые покупал u_0,
часто покупают $I(u_0)$»



1. $I(u_0) := \{i \in I \mid \exists i_0 : r_{u_0 i_0} \neq \varnothing$ и $B(i) = \mathrm{sim}(i, i_0) > \alpha\}$;
   где $\mathrm{sim}(i, i_0)$ — одна из возможных мер сходства i и i_0;
2. сортировка $i \in I(u_0)$ по убыванию $B(i)$, взять top N;

От объекта (item-based CF)

«вместе с объектами,
которые покупал u_0,
часто покупают $I(u_0)$»



Недостатки:

- рекомендации часто тривиальны (нет коллаборативности);
- проблема «холодного старта»;
- надо хранить всю матрицу R;
- ~~нечего рекомендовать нетипичным пользователям~~.

Непараметрическая регрессия для восстановления пропусков

User-based: $$\hat{r}_{ui} = \bar{r}_u + \frac{\sum\limits_{v \in U_\alpha(u)} \text{sim}(u,v)(r_{vi} - \bar{r}_v)}{\sum\limits_{v \in U_\alpha(u)} \text{sim}(u,v)}$$

Item-based: $$\hat{r}_{ui} = \bar{r}_i + \frac{\sum\limits_{j \in I_\alpha(i)} \text{sim}(i,j)(r_{uj} - \bar{r}_j)}{\sum\limits_{j \in I_\alpha(i)} \text{sim}(i,j)}$$

$\bar{r}_u$ и $\bar{r}_i$ — средний рейтинг клиента u и объекта i,

$\text{sim}(u,v)$ и $\text{sim}(i,j)$ — функции близости (u,v) и (i,j),

$U_\alpha(u) = \{v \mid \text{sim}(u,v) > \alpha\}$ — коллаборация клиента u,

$I_\alpha(i) = \{j \mid \text{sim}(i,j) > \alpha\}$ — множество объектов, близких к i.

Функции близости, используемые в корреляционных методах

- корреляция Пирсона:

$$\text{sim}(u,v) = \frac{\sum\limits_{i \in I(u,v)} (r_{ui} - \bar{r}_u)(r_{vi} - \bar{r}_v)}{\sqrt{\sum\limits_{i \in I(u,v)} (r_{ui} - \bar{r}_u)^2 \sum\limits_{i \in I(u,v)} (r_{vi} - \bar{r}_v)^2}};$$

- косинусная мера близости:

$$\text{sim}(u,v) = \frac{\sum\limits_{i \in I(u,v)} r_{ui} r_{vi}}{\sqrt{\sum\limits_{i \in I(u,v)} r_{ui}^2 \sum\limits_{i \in I(u,v)} r_{vi}^2}};$$

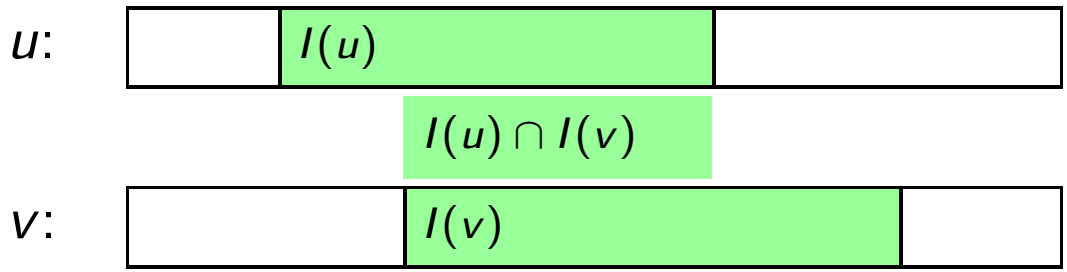
где $I(u,v) = \begin{cases} I(u) \cup I(v), & \text{для бинарных данных,} \\ I(u) \cap I(v), & \text{для рейтинговых данных.} \end{cases}$

- статистические критерии:
  χ^2, точный тест Фишера (для бинарных данных).

Функции близости на основе точного теста Фишера (FET)

Рассмотрим случай бинарных данных, $r_{ui} \in \{0, 1\}$.

Нулевая гипотеза:
клиенты u и v совершают свой выбор независимо.



Вероятность случайной реализации i совместных выборов

$$p(i) = P\{|I(u) \cap I(v)| = i\} = \frac{C^{i}_{|I(u)|} C^{|I(v)|-i}_{|I|-|I(u)|}}{C^{|I(v)|}_{|I|}}.$$

Функция близости $I(u, v) = -\log p\big(|I(u) \cap I(v)|\big)$.

Резюме по Memory-Based методам

Преимущества для бизнес-приложений:

- Легко понять.
- Легко реализовать.

Недостатки:

- Не хватает теоретического обоснования:
  придумано много способов оценить сходство...
  придумано много гибридных (item-user-based) методов...
  ...и не ясно, что лучше;
- Все методы требуют хранения огромной матрицы R.
- Проблема «холодного старта».

Далее:

- *Латентные модели* — лишены этих недостатков.

Понятие латентной модели

Латентная модель: по данным D оцениваются векторы:
$(p_{tu})_{t\in G}$ — профили клиентов $u \in U$, $\quad |G| \ll |I|$;
$(q_{ti})_{t\in H}$ — профили объектов $i \in I$, $\quad |H| \ll |U|$.

Типы латентных моделей (основные идеи):

1. Ко-кластеризация:
   — жёсткая: $\begin{cases} p_{tu} = \big[\text{клиент } u \text{ принадлежит кластеру } t \in G\big]; \\ q_{ti} = \big[\text{объект } i \text{ принадлежит кластеру } t \in H\big]; \end{cases}$
   — мягкая: p_{tu}, q_{ti} — степени принадлежности кластерам.
2. Матричные разложения: $G \equiv H$ — множество тем;
   по p_{tu}, q_{ti} должны восстанавливаться r_{ui}.
3. Вероятностные модели: $G \equiv H$ — множество тем;
   $p_{tu} = p(t|u)$, $q_{ti} = q(t|i)$.

Матричные разложения (matrix factorization)

T — множество тем (интересов): $|T| \ll |U|$, $|T| \ll |I|$;

p_{tu} — неизвестный *профиль клиента* u; $P = (p_{tu})_{|T| \times |U|}$;

q_{ti} — неизвестный *профиль объекта* i; $Q = (q_{ti})_{|T| \times |I|}$;

Задача: найти разложение $r_{ui} = \sum_{t \in T} \pi_t p_{tu} q_{ti}$;

Матричная запись: $R = P^{\mathrm{T}} \Delta Q$, $\Delta = \operatorname{diag}(\pi_1, \ldots, \pi_{|T|})$;

Вероятностный смысл: $\underbrace{p(u,i)}_{r_{ui}?} = \sum_{t \in T} \underbrace{p(t)}_{\pi_t} \cdot \underbrace{p(u|t)}_{p_{tu}} \cdot \underbrace{q(i|t)}_{q_{ti}}$;

Методы решения:

SVD — сингулярное разложение;

NNMF — неотрицательное матричное разложение: $p_{tu} \geqslant 0$, $q_{ti} \geqslant 0$;

PLSA — вероятностный латентный семантический анализ.

Сингулярное разложение (SVD, singular value decomposition)

Постановка задачи SVD: $\|R - P^{\mathsf{T}}\Delta Q\|^2 \to \min_{P,Q,\Delta}$.

Недостатки:

- если r_{ui} не известно, то полагаем $r_{ui} = 0$
- ортогональность вектор-строк p_t, q_t
- неинтерпретируемость компонент вектор-строк

Достоинства:

- обоснование $r_{ui} = 0$: если клиент u никогда не выбирал объект i, то он ему, скорее всего, не интересен
- высокую оценку $\hat{r}_{ui}$ получат лишь самые интересные
- можно применять готовые библиотеки линейной алгебры
- хорошее ранжирование предложений на некоторых данных

Cremonesi P., Koren Y., Turrin R. Performance of Recommender Algorithms on Top-N Recommendation Tasks. RecSys 2010.

Модель латентных факторов (LFM, Latent Factor Model)

Модификация задачи SVD для случая разреженных данных:

$$\sum_{(u,i)\in D} \Bigg(\underbrace{r_{ui} - \bar{r}_u - \bar{r}_i - \sum_{t\in T} p_{tu} q_{ti}}_{\varepsilon_{ui}} \Bigg)^2 \to \min_{P,Q}$$

Метод стохастического градиента:
перебираем все $(u,i) \in D$ многократно в случайном порядке и делаем каждый раз градиентный шаг для задачи $\varepsilon_{ui}^2 \to \min\limits_{p_u, q_i}$:

$$p_{tu} := p_{tu} + \eta \varepsilon_{ui} q_{ti}, \quad t \in T;$$
$$q_{ti} := q_{ti} + \eta \varepsilon_{ui} p_{tu}, \quad t \in T;$$

Tacáks G., Pilászy I., Németh B., Tikk D. Scalable collaborative filtering approaches for large recommendation systems // JMLR, 2009, No. 10, Pp. 623–656.

Модель латентных факторов (LFM, Latent Factor Model)

Преимущества метода стохастического градиента:

- легко вводится регуляризация:
$$\varepsilon_{ui}^2 + \lambda\|p_u\|^2 + \mu\|q_i\|^2 \to \min_{p_u, q_i};$$
- легко вводятся ограничения неотрицательности:
$$p_{tu} \geqslant 0, \quad q_{ti} \geqslant 0 \quad \text{(метод проекции градиента)};$$
- легко вводится обобщение для ранговых данных:
$$\sum_{(u,i)\in D} \left(r_{ui} - \bar{r}_u - \bar{r}_i - \beta\Big(\sum_{t\in T} p_{tu} q_{ti}\Big)\right)^2 \to \min_{P,Q,\beta}.$$
- легко реализуются все виды инкрементности: добавление
  – ещё одного клиента u,
  – ещё одного объекта i,
  – ещё одного значения r_{ui}.
- высокая численная эффективность на больших данных;

NNMF (Non-Negative Matrix Factorization)

Метод чередующихся наименьших квадратов (Alternating Least Squares, ALS):

$$D = \left\| R - \sum_{t \in T} p_t q_t^{\mathsf{T}} \right\|^2 = \left\| R_t - p_t q_t^{\mathsf{T}} \right\|^2 \to \min_{\{p_t \geqslant 0,\, q_t \geqslant 0\}}$$

Идея: искать поочерёдно то строки p_t, то строки q_t при фиксированных остальных $s \neq t$, $R_t = R - \sum_{s \in T \setminus t} p_s q_s^{\mathsf{T}}$.

$$\frac{\partial D}{\partial p_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad (p_t^{\mathsf{T}} q_t - R_t) q_t^{\mathsf{T}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_t = \left(\frac{q_t R_t^{\mathsf{T}}}{q_t q_t^{\mathsf{T}}} \right)_+$$

$$\frac{\partial D}{\partial q_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_t (p_t^{\mathsf{T}} q_t - R_t) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_t = \left(\frac{p_t R_t}{p_t p_t^{\mathsf{T}}} \right)_+$$

Cichocki A., Zdunek R., Amari S., Hierarchical ALS algorithms for nonnegative matrix and 3D tensor factorization. 2007

Вероятностный латентный семантический анализ (PLSA)

Пусть T — множество тем (интересов), $p(u,i|t) = p(u|t)\,q(i|t)$.

Вероятностная модель посещений [Hofmann, 1999]:

$$p(u,i) = \sum_{t\in T} p(t)\,p(u|t)\,q(i|t).$$

Задача максимизации правдоподобия по $p(t)$, $p(u|t)$, $q(i|t)$:

$$L(\Delta,P,Q) = \sum_{u,i} r_{ui} \ln p(u,i) \to \max.$$

при ограничениях нормировки:

$$\sum_{t\in T} p(t) = 1; \quad \sum_{u\in U} p(u|t) = 1; \quad \sum_{i\in I} q(i|t) = 1.$$

Тематические профили вычисляются по формуле Байеса:

$p(t|u) = p(u|t)\frac{p(t)}{p(u)}$ — неизвестный *профиль клиента* u;

$q(t|i) = p(i|t)\frac{p(t)}{p(i)}$ — неизвестный *профиль объекта* i;

Модель с учётом неявной информации (implicit feedback)

Явные (explicit) предпочтения r_{ui}, более качественные данные:

- покупки товаров в интернет-магазине
- оценки, рейтинги, лайки/дизлайки

Неявные (implicit) предпочтения s_{ui}, большой объём данных:

- посещение страницы товара
- просмотр (какой-то части) фильма

Идея: предсказываем s_{ui} с весом $c_{ui} = 1 + \alpha r_{ui}$:

$$\sum_{(u,i)\in D} c_{ui}\left(s_{ui} - \bar{s}_u - \bar{s}_i - \sum_{t\in T} p_{tu}q_{ti}\right)^2 + \lambda \sum_{u\in U}\|p_u\|^2 + \mu \sum_{i\in I}\|q_i\|^2 \to \min_{P,Q}$$

Модель с неявными предпочтениями победила в Netflix Prize.

Bell R. M., Koren Y., Volinsky C. The BellKor 2008 solution to the Netflix Prize.

Линейная регрессионная модель

$x_{ui} = (x_{ui1}, \ldots, x_{uin})$ — вектор признакового описания (u, i)

Примеры признаков:

- для фильмов: текст описания, теги, артисты
- для музыки: жанр, исполнитель, теги
- для событий: текст описания, геолокация, отзывы
- унитарный код (one-hot encoding) клиента u
- унитарный код (one-hot encoding) объекта i

Линейная регрессионная модель для r_{ui}:

$$\hat{r}_{ui} = w_0 + \sum_{j=1}^{n} w_j x_{uij}.$$

Она не описывает связи между пользователями и объектами.

Квадратичная регрессионная модель

Добавим взаимодействия между признаками:

$$\hat{r}_{ui} = w_0 + \sum_{j=1}^{n} w_j x_{uij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w_{jk} x_{uij} x_{uik}$$

Представим веса w_{jk} низкоранговым матричным разложением:

$$w_{jk} = v_j^{\mathsf{T}} v_k, \qquad v_i \in \mathbb{R}^{|T|}.$$

- регулируемое число параметров
- если нет дополнительных признаков, то получаем LFM
- настраивается с помощью SGD или ALS
- наиболее мощный инструмент — библиотека libFM

Steffen Rendle. Factorization machines with libFM. 2012.

Измерение качества рекомендаций

RMSE — точность предсказания рейтингов:

$$\text{RMSE}^2 = \sum_{(u,i)\in D} \left(r_{ui} - \hat{r}_{ui}\right)^2$$

Точность предсказаний не гарантирует хороших рекомендаций.

$R_u(k) \subset I$ — первые k рекомендаций для u;
$L_u \subset I$ — истинные предпочтения u.

Более адекватные метрики качества рекомендаций:

- $\text{precision@}k = \frac{|R_u(k) \cap L_u|}{|R_u(k)|}$ — точность
- $\text{recall@}k = \frac{|R_u(k) \cap L_u|}{|L_u|}$ — полнота
- меры качества ранжирования: MAP, NDCG и др.

Измерение качества рекомендаций

Рекомендательные системы отличаются многокритериальностью:

- *Разнообразие* (diversity): например, число рекомендаций из разных категорий или степень различия рекомендаций между сессиями пользователя
- *Новизна* (novelty): сколько среди рекомендаций объектов, новых для пользователя
- *Покрытие* (coverage): доля объектов, которые хотя бы раз побывали среди рекомендованных
- *Догадливость* (serendipity): способность угадывать неожиданные нетривиальные предпочтения пользователей

Можно оптимизировать линейную комбинацию критериев, либо оптимизировать один при ограничениях на остальные.

Оффлайн- и онлайн- измерения качества рекомендаций

Типичная схема эксперимента:

- разбиваем выборку сессий на обучение и тест;
- оптимизируем оффлайн-метрику качества на обучении;
- оцениваем качество на тесте и выбираем модель;
- внедряем модель в рекомендательный сервис;
- проводим AB-тестирование, измеряем онлайн-метрику (деньги или число кликов).

Онлайн- и оффлайн-метрики могут быть слабо связаны:

- в оффлайне не известно, что пользователь мог бы купить
- в оффлайне не известно, что он купил бы без рекомендаций.

Выводы из экспериментов: для улучшения онлайн-точности нужно оптимизировать разные аспекты качества в оффлайне.

Резюме

Коллаборативная фильтрация (Collaborative Filtering) — это набор методов для построения рекомендательных систем (Recommender Systems).

Корреляционные модели — простые, но устаревшие.

Модели латентной семантики обладают рядом преимуществ:

- тематические профили содержательно интерпретируемы,
- оцениваются по внешним данным для «холодного старта»,
- дают адекватные оценки сходства клиентов и объектов,
- позволяют ранжировать рекомендации,
- резко сокращают объём хранимых данных.