# Оценивание моделей и отбор признаков

K.B. Воронцов vokov@forecsys.ru

Этот курс доступен на странице вики-ресурса http://www.MachineLearning.ru/wiki «Машинное обучение (курс лекций, К.В.Воронцов)»

февраль 2011

### Содержание

- 1 Задачи выбора модели и отбора признаков
  - Задача выбора модели
  - Задача отбора признаков
  - Внешние и внутренние критерии
- Критерии выбора модели
  - Критерии скользящего контроля
  - Критерии непротиворечивости моделей
  - Критерии регуляризации
- 3 Методы отбора признаков
  - Полный перебор и жадные алгоритмы
  - Поиск в глубину и в ширину
  - Стохастический поиск

## Задача выбора модели (model selection)

### Дано:

```
X — пространство объектов; Y — множество ответов; X^\ell=(x_i,y_i)_{i=1}^\ell — обучающая выборка, y_i=y^*(x_i); A_t=\{a\colon X\to Y\} — модели алгоритмов, t=1,\ldots,T; \mu_t\colon (X\times Y)^\ell\to A_t — методы обучения, t=1,\ldots,T.
```

**Найти:** метод  $\mu_t$ , наиболее адекватный (т. е. обладающий наилучшей обобщающей способностью) для данной задачи.

### Частные случаи:

- выбор наиболее адекватной модели  $A_t$ ;
- выбор метода обучения  $\mu_t$  для заданной модели A (в частности, подбор значения гиперпараметра);
- выбор признаков.

## Задача отбора признаков (features selection)

 $\mathscr{F}=\left\{f_j\colon X\to D_j\colon j=1,\ldots,n\right\}$  — множество признаков;  $\mu_\mathscr{G}$  — метод обучения, использующий «урезанные» описания объектов, включающие только признаки из  $\mathscr{G}\subseteq\mathscr{F}$ .

#### Задача отбора признаков:

- Какие признаки лишние (шумовые)?
- Какие признаки дублируют друг друга?

#### Основная проблема:

Непустых наборов признаков:  $2^n - 1$ .

Задача выбора подмножества в общем случае NP-трудна.

Функционал качества алгоритма на выборке:

$$Q(a, X^{\ell}) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \mathscr{L}(a, x_i).$$

### Внешние и внутренние критерии

Bнутренний критерий — это качество на обучении  $X^\ell$ :

$$Q_{\mathrm{int}}(\mu, X^{\ell}) = Q(\mu(X^{\ell}), X^{\ell}).$$

Внешний критерий — это качество на новых данных. Строгого определения нет. Известно много разновидностей.

Например, ошибка на отложенных данных (hold-out error):

$$Q_{\text{ext}}(\mu, X^L) = Q(\mu(X^\ell), X^k),$$

где  $X^k$  — контрольная выборка,  $X^L = X^\ell \sqcup X^k$ ,  $L = \ell + k$ .

#### Недостатки hold-out:

- 1) результат зависит от способа разбиения выборки;
- 2) уменьшается длина обучения  $\ell \ll L$ ;
- 3) при малых k слишком велика дисперсия оценки.

#### Внешние и внутренние критерии

Bнутренний критерий — это качество на обучении  $X^\ell$ :

$$Q_{\mathrm{int}}(\mu, X^{\ell}) = Q(\mu(X^{\ell}), X^{\ell}).$$

Внешний критерий — это качество на новых данных.

Внешний критерий позволяет найти оптимум сложности модели.



### Скользящий контроль

 $X^L = X_n^\ell \sqcup X_n^k$ ,  $n=1,\ldots,N$  — несколько различных разбиений; Оценка *скользящего контроля* (cross-validation error, CV):

$$CV(\mu, X^L) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Q(\mu(X_n^{\ell}), X_n^k).$$

Полный скользящий контроль (complete CV):  $N=C_L^\ell$ 

### Преимущества CCV:

- это наиболее устойчивая оценка из всех разновидностей CV;
- иногда удаётся выразить точную оценку (kNN).

### Недостатки CCV:

- ресурсоёмкость — при k > 2 вычислить CCV нереально.

### Скользящий контроль «leave-one-out»

Контроль по отдельным объектам (leave-one-out CV): k=1,

$$LOO(\mu, X^L) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} Q(\mu(X^L \setminus \{x_i\}), \{x_i\}).$$

### Преимущества LOO:

- каждый объект ровно один раз участвует в контроле;
- длина обучения  $\ell = L 1$ .

#### **Недостатки** LOO:

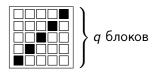
- каждый объект лишь один раз участвует в контроле;
- ресурсоёмкость;
- высокая дисперсия.

## Скользящий контроль с разбиением по блокам

## Контроль по q блокам (q-fold CV):

$$X^{L} = X_{1}^{\ell_{1}} \sqcup \cdots \sqcup X_{q}^{\ell_{q}}, \quad \ell_{1} + \cdots + \ell_{q} = L;$$

$$Q_{\text{ext}}(\mu, X^{L}) = \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{q} Q(\mu(X^{L} \setminus X_{n}^{\ell_{n}}), X_{n}^{\ell_{n}}).$$



### **Преимущества** q-fold CV:

- компромисс между LOO и hold-out.

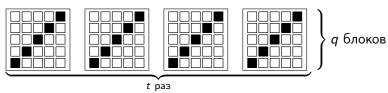
## Недостатки q-fold CV:

- каждый объект лишь один раз участвует в контроле.

## Скользящий контроль с многократным разбиением по блокам

Контроль t раз по q блокам ( $t \times q$ -fold CV):

$$\begin{split} X^L &= X_{s1}^{\ell_1} \sqcup \dots \sqcup X_{sq}^{\ell_q}, \quad s = 1, \dots, t, \quad \ell_1 + \dots + \ell_q = L; \\ Q_{\text{ext}}(\mu, X^L) &= \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t \frac{1}{q} \sum_{n=1}^q Q\big(\mu(X^L \setminus X_{sn}^{\ell_n}), X_{sn}^{\ell_n}\big). \end{split}$$



### Преимущества $t \times q$ -fold CV:

- компромисс между точностью и временем вычислений;
- каждый объект участвует в контроле ровно t раз;
- легко вычислять доверительные интервалы (при  $t \geqslant 20$ );

### Критерии непротиворечивости моделей

**Идея:** Если модель верна, то алгоритмы, настроенные по разным частям данных, не должны противоречить друг другу.

По одному случайному разбиению  $X^{\ell} \sqcup X^k = X^L$ ,  $\ell = k$ :

$$Q_{\text{ext}}(\mu, X^L) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} |\mu(X^\ell)(x_i) - \mu(X^k)(x_i)|.$$

**Аналог CV**: по N разбиениям  $X^L = X_n^\ell \sqcup X_n^k$ ,  $n = 1, \ldots, N$ :

$$Q_{\text{ext}}(\mu, X^{L}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} |\mu(X_{n}^{\ell})(x_{i}) - \mu(X_{n}^{k})(x_{i})|.$$

### Недостатки:

- выборка сокращается в 2 раза;
- трудоёмкость возрастает в 2 раза;
- высокая дисперсия (сокращается при увеличении N).

### Критерии регуляризации

 $Perynnerset{property} -$ аддитивная добавка к функционалу, штраф за сложность (complexity penalty) модели A:

$$Q_{\mathsf{ext}}(\mu, X^{\ell}) = Q_{\mathsf{int}}(\mu, X^{\ell}) + \mathsf{штра} \varphi(A),$$

Линейные модели:  $A=\left\{a(x)=\mathrm{sign}\langle w,x\rangle\right\}$  — классификация,  $A=\left\{a(x)=\langle w,x\rangle\right\}$  — регрессия.

 $L_2$ -регуляризация (ридж-регрессия, weight decay):

штраф
$$(w) = \tau \|w\|_2^2 = \tau \sum_{j=1}^n w_j^2$$
.

 $L_1$ -регуляризация (LASSO):

штраф
$$(w) = \tau \|w\|_1 = \tau \sum_{j=1}^n |w_j|.$$

 $L_0$ -регуляризация (AIC, BIC):

штраф
$$(w) = \tau \|w\|_0 = \tau \sum_{i=1}^n \left[w_i \neq 0\right] = \tau |\mathscr{G}|.$$

### Разновидности $L_0$ -регуляризации

Информационный критерий Акаике (Akaike Information Criterion):

$$\mathsf{AIC}(\mu, \mathsf{X}^\ell) = Q_\mathsf{int}(\mu, \mathsf{X}^\ell) + \frac{2\hat{\sigma}^2}{\ell} |\mathscr{G}|,$$

где  $\hat{\sigma}^2$  — оценка дисперсии ошибки  $\mathsf{D}(y_i - \mathsf{a}(x_i))$ .

Байесовский информационный критерий (Bayes Inform. Criterion):

$$\mathsf{BIC}(\mu, X^\ell) = rac{\ell}{\hat{\sigma}^2} \left( Q_\mathsf{int}(\mu, X^\ell) + rac{\hat{\sigma}^2 \ln \ell}{\ell} |\mathscr{G}| 
ight).$$

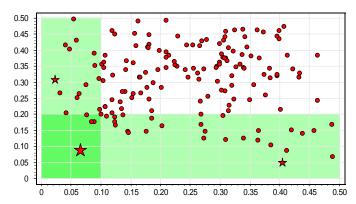
Оценка Вапника-Червоненкиса (VC-bound):

$$Q_{ ext{ext}}(\mu, X^\ell) = Q_{ ext{int}}(\mu, X^\ell) + \sqrt{rac{h}{\ell} \left( \ln rac{2\ell}{h} + 1 
ight) - rac{\ln \eta}{\ell}},$$

h — VC-размерность; для линейных, опять-таки,  $h = |\mathscr{G}|$ ;  $\eta$  — уровень значимости; обычно  $\eta = 0.05$ .

### Двухступенчатый отбор по совокупности внешних критериев

Модель, немного неоптимальная по обоим критериям, скорее всего, лучше, чем модель, оптимальная по одному критерию, но сильно не оптимальная по другому.



## Алгоритм полного перебора (Full Search)

Пусть  $Q(\mathscr{G})$  — какой-либо внешний критерий.

 $\mathsf{Bxog}$ : множество  $\mathscr{F}$ , критерий Q, параметр d;

```
1: Q^* := +\infty; — инициализация;

2: для всех j = 1, \ldots, n, где j — сложность наборов:

3: найти лучший набор сложности j: \mathscr{G}_j := \underset{\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}: |\mathscr{G}| = j}{\operatorname{arg min}} Q(\mathscr{G});

4: если Q(\mathscr{G}_j) < Q^* то j^* := j; Q^* := Q(\mathscr{G}_j);

5: если j - j^* \geqslant d то вернуть \mathscr{G}_{i^*};
```

## Алгоритм полного перебора (Full Search)

### Преимущества:

- простота реализации;
- гарантированный результат;
- неплохой выбор, когда информативных признаков ≤ 5;
- неплохой выбор, когда всего признаков  $\lesssim 20$ .

#### Недостатки:

- в остальных случаях ооооооочень долго —  $O(2^n)$ .

#### Способы устранения:

- эвристические методы сокращённого перебора.

## Алгоритм жадного добавления

# $\mathsf{B}\mathsf{xo}\mathsf{d}$ : множество $\mathscr{F}$ , критерий Q, параметр d;

- 1:  $\mathscr{G}_0 := \varnothing$ ;  $Q^* := +\infty$ ; инициализация;
- 2: **для всех** j = 1, ..., n, где j сложность наборов:
- 3: найти признак, наиболее выгодный для добавления:

$$f^* := \underset{f \in \mathscr{F} \setminus \mathscr{G}_{j-1}}{\operatorname{arg\,min}} Q(\mathscr{G}_{j-1} \cup \{f\});$$

4: добавить этот признак в набор:

$$\mathscr{G}_j := \mathscr{G}_{j-1} \cup \{f^*\};$$

- 5: если  $Q(\mathscr{G}_j) < Q^*$  то  $j^* := j; \ Q^* := Q(\mathscr{G}_j);$
- 6: если  $j j^* \geqslant d$  то вернуть  $\mathscr{G}_{j^*}$ ;

## Алгоритм жадного добавления

### Преимущества:

- работает быстро  $O(n^2)$ , точнее  $O(n(j^*+d))$ ;
- возможны быстрые инкрементные алгоритмы;

#### Недостатки:

- Add склонен включать в набор лишние признаки.

### Способы устранения:

- Add-Del чередование добавлений и удалений;
- расширение поиска.

1:  $\mathscr{G}_0 := \varnothing$ ; t := 0; — инициализация;

## Алгоритм поочерёдного добавления и удаления

```
2: повторять
 3:
         Q^* := +\infty; — начать добавления Add
 4:
         пока |\mathcal{G}_t| < n
 5:
              t := t + 1; — началась следующая итерация;
              f^* := \operatorname{arg\,min} \ Q(\mathscr{G}_{t-1} \cup \{f\}); \quad \mathscr{G}_t := \mathscr{G}_{t-1} \cup \{f^*\};
 6:
                       f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}_{t-1}
              если Q(\mathscr{G}_t) < Q^* то t^* := t; \;\; Q^* := Q(\mathscr{G}_t);
 7:
 8:
              если t - t^* \geqslant d то прервать цикл;
 9:
          Q^*:=+\infty: — начать добавления Add
          пока |\mathcal{G}_t| > 0
10:
11:
              t := t + 1; — началась следующая итерация;
              f^* := \operatorname{arg\,min} Q(\mathscr{G}_{t-1} \setminus \{f\}); \quad \mathscr{G}_t := \mathscr{G}_{t-1} \setminus \{f^*\};
12:
13:
              если Q(\mathcal{G}_t) < Q^* то t^* := t; \ Q^* := Q(\mathcal{G}_t);
14:
              если t - t^* \geqslant d то прервать цикл;
```

16: вернуть  $\mathcal{G}_{t^*}$ ;

15: **пока** значения критерия  $Q(\mathscr{G}_{t^*})$  уменьшаются;

## Алгоритм поочерёдного добавления и удаления

### Преимущества:

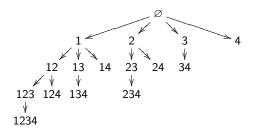
- как правило, лучше, чем Add и Del по отдельности;
- возможны быстрые инкрементные алгоритмы (пример *шаговая регрессия*).

#### Недостатки:

- работает дольше, оптимальность не гарантирует.

## Поиск в глубину (метод ветвей и границ)

**Пример:** дерево наборов признаков, n = 4



#### Основные идеи:

- нумерация признаков по возрастанию номеров чтобы избежать повторов при переборе подмножеств;
- если набор  $\mathscr{G}$  бесперспективен, то больше не пытаться его наращивать.

## Поиск в глубину (метод ветвей и границ)

Обозначим  $Q_j^*$  — значение критерия на самом лучшем наборе мощности j из всех до сих пор просмотренных.

Оценка бесперспективности набора признаков  $\mathscr{G}$ : набор  $\mathscr{G}$  не наращивается, если

$$\exists j \colon \quad Q(\mathscr{G}) \geqslant \varkappa Q_j^* \quad \text{if} \quad |\mathscr{G}| \geqslant j+d,$$

 $d\geqslant 0$  — целочисленный параметр,  $\varkappa\geqslant 1$  — вещественный параметр.

Чем меньше d и arkappa, тем сильнее сокращается перебор.

## Поиск в глубину (метод ветвей и границ)

**Вход:** множество  $\mathscr{F}$ , критерий Q, параметры d и  $\varkappa$ ;

- 1: **ПРОЦЕДУРА** Нарастить  $(\mathscr{G})$ ;
- 2: если найдётся  $j\leqslant |\mathscr{G}|-d$  такое, что  $Q(\mathscr{G})\geqslant \varkappa Q_i^*$ , то
- 3: выход;
- 4:  $Q_{|\mathscr{G}|}^* := \min\{Q_{|\mathscr{G}|}^*, Q(\mathscr{G})\};$
- 5: для всех  $f_s \in \mathscr{F}$  таких, что  $s > \max\{t \mid f_t \in \mathscr{G}\}$  Нарастить  $(\mathscr{G} \cup \{f_s\});$
- 6: Инициализация массива лучших значений критерия:
  - $Q_i^* := +\infty$  для всех  $j = 1, \ldots, n$ ;
- 7: Упорядочить признаки по убыванию информативности;
- 8: Нарастить ( $\emptyset$ );
- 9: вернуть  $\mathscr{G}$ , для которого  $Q(\mathscr{G}) = \min_{j=1,\dots,n} Q_j^*$ ;

### Поиск в ширину

Он же *многорядный итерационный алгоритм МГУА* (МГУА — метод группового учёта аргументов).

Философский принцип *неокончательных решений* Габора: принимая решения, следует оставлять максимальную свободу выбора для принятия последующих решений.

Усовершенствуем алгоритм Add: на каждой j-й итерации будем строить не один набор, а множество из  $B_j$  наборов, называемое j-м pяdом:

$$R_j = \{\mathscr{G}_j^1, \dots, \mathscr{G}_j^{B_j}\}, \quad \mathscr{G}_j^b \subseteq \mathscr{F}, \quad |\mathscr{G}_j^b| = j, \quad b = 1, \dots, B_j.$$

где  $B_i \leqslant B$  — параметр ширины поиска.

### Поиск в ширину

# $\mathsf{Bxog}$ : множество $\mathscr{F}$ , критерий Q, параметры d, B;

```
1: первый ряд состоит из всех наборов длины 1:
    R_1 := \{\{f_1\}, \dots, \{f_n\}\};
2: для всех j = 1, ..., n, где j — сложность наборов:
       отсортировать ряд R_i = \{\mathscr{G}_i^1, \dots, \mathscr{G}_i^{B_j}\}
3:
       по возрастанию критерия: Q(\mathscr{G}_i^1) \leqslant \ldots \leqslant Q(\mathscr{G}_i^{B_j});
       если B_i > B то
4:
           R_i := \{\mathscr{G}_i^1, \dots, \mathscr{G}_i^B\}; \quad -B лучших наборов ряда;
5:
       если Q(\mathcal{G}_i^1) < Q^* то j^* := j; \; Q^* := Q(\mathcal{G}_i^1);
6:
       если j - j^* \geqslant d то вернуть \mathcal{G}_{i^*}^1;
7:
8:
       породить следующий ряд:
       R_{i+1} := \{ \mathscr{G} \cup \{ f \} \mid \mathscr{G} \in R_i, f \in \mathscr{F} \setminus \mathscr{G} \};
```

### Поиск в ширину

- Трудоёмкость:  $O(n^2)$ , точнее  $O(Bn(j^* + d))$ .
- Проблема дубликатов: после сортировки (шаг 3) проверить на совпадение только соседние наборы с равными значениями внутреннего и внешнего критерия.
- Адаптивный отбор признаков: на шаге 8 добавлять к j-му ряду только признаки f с наибольшей информативностью  $I_i(f)$ :

$$I_j(f) = \sum_{b=1}^{B_j} [f \in \mathscr{G}_j^b].$$

## Генетический алгоритм поиска (идея и терминология)

$$\mathscr{G}\subseteq\mathscr{F}$$
 — индивид (в МГУА «модель»);  $R_t:=\left\{\mathscr{G}_t^1,\ldots,\mathscr{G}_t^{\mathcal{B}_t}\right\}$  — поколение (в МГУА — «ряд»);  $\beta=(\beta_j)_{j=1}^n,\;\;\beta_j=[f_j\in\mathscr{G}]$  — хромосома, кодирующая  $\mathscr{G}$ ;

Бинарная операция *скрещивания*  $\beta = \beta' \times \beta''$ :

$$eta_j = egin{cases} eta_j', & ext{c вероятностью } 1/2; \ eta_j'', & ext{c вероятностью } 1/2; \end{cases}$$

Унарная операция мутации  $\beta = \sim \beta'$ 

$$eta_j = egin{cases} 1 - eta_j', & ext{c вероятностью } p_m; \ eta_j', & ext{c вероятностью } 1 - p_m; \end{cases}$$

где параметр  $p_{m}$  — вероятность мутации.

## Генетический (эволюционный) алгоритм

```
Вход: множество \mathscr{F}, критерий Q, параметры: d, p_m, B — размер популяции, T — число поколений;
```

```
1: инициализировать случайную популяцию из B наборов:
    B_1 := B; R_1 := \{\mathscr{G}_1^1, \dots, \mathscr{G}_1^{B_1}\}; Q^* := +\infty;
2: для всех t = 1, ..., T, где t — номер поколения:
       ранжирование индивидов: Q(\mathcal{G}_t^1) \leqslant \ldots \leqslant Q(\mathcal{G}_t^{B_t});
3:
       если B_t > B то
4:
          селекция: R_t := \{\mathscr{G}_t^1, \dots, \mathscr{G}_t^B\};
5:
       если Q(\mathcal{G}_t^1) < Q^* то t^* := t; \ Q^* := Q(\mathcal{G}_t^1);
6:
       если t - t^* \geqslant d то вернуть \mathscr{G}_{t^*}^1;
7:
       породить t+1-е поколение путём скрещиваний и мутаций:
8:
       R_{t+1} := \{ \sim (\mathscr{G}' \times \mathscr{G}'') \mid \mathscr{G}', \mathscr{G}'' \in R_t \} \cup R_t;
```

### Эвристики для управления процессом эволюции

- Увеличивать вероятности перехода признаков от более успешного родителя к потомку.
- Накапливать оценки информативности признаков.
   Чем более информативен признак, тем выше вероятность его включения в набор во время мутации.
- Применение совокупности критериев качества.
- Скрещивать только лучшие индивиды (элитаризм).
- Переносить лучшие индивиды в следующее поколение.
- В случае стагнации увеличивать вероятность мутаций.
- Параллельно выращивается несколько изолированных популяций (островная модель эволюции).

### Генетический (эволюционный) алгоритм

### Преимущества:

- возможность введения различных эвристик;
- решает задачи даже с очень большим числом признаков.

#### Недостатки:

- относительно медленная сходимость;
- отсутствие теории;
- подбор параметров непростое искусство;

## Случайный поиск — упрощенный генетический алгоритм

### Модификация: шаг 8

- породить t+1-е поколение путём многократных *мутаций*:

$$R_{t+1} := \{ \sim \mathscr{G}, \dots, \sim \mathscr{G} \mid \mathscr{G} \in R_t \} \cup R_t;$$

#### Недостатки:

- ничем не лучше ГА;
- очень медленная сходимость.

#### Способ устранения:

СПА — случайный поиск с адаптацией.

#### Основная идея адаптации:

- увеличивать вероятность появления тех признаков, которые часто входят в наилучшие наборы,
- одновременно уменьшать вероятность появления признаков, которые часто входят в наихудшие наборы.

## Случайный поиск с адаптацией (СПА)

**Вход:** множество  $\mathscr{F}$ , критерий Q, параметры d,  $j_0$ , T, r, h;

```
1: p_1 = \cdots = p_n := 1/n; — равные вероятности признаков;
 2: для всех i = i_0, ..., n, где i — сложность наборов:
         для всех t = 1, ..., T, где t — номер итерации:
 3:
              r случайных наборов признаков из распределения \{p_1,\ldots,p_n\}:
 4:
             R_{it} := \{\mathcal{G}_{it}^1, \dots, \mathcal{G}_{it}^r\}, \quad |\mathcal{G}_{it}^1| = \dots = |\mathcal{G}_{it}^r| = j;
             \mathscr{G}_{jt}^{\min} := rg\min_{\mathscr{G} \in \mathcal{R}_{tr}} Q(\mathscr{G}); — лучший из r наборов;
 5:
             \mathscr{G}_{jt}^{\max} := \arg\max_{\mathscr{G} \in R_{lt}} Q(\mathscr{G}); \; - худший из r наборов;
 6:
             H:=0; наказание для всех f_s \in \mathscr{G}_{it}^{\mathsf{max}}:
 7:
             \Delta p_s := \min\{p_s, h\}; \quad p_s := p_s - \Delta p_s; \quad H := H + \Delta p_s;
             поощрение для всех f_s \in \mathscr{G}_{it}^{\min}: p_s := p_s + H/j;
 8:
         \mathscr{G}_i := \operatorname{arg\,min} \ Q(\mathscr{G}); \ - лучший набор сложности j;
 9:
                  \mathcal{G} \in R_{i1}, \dots, R_{iT}
         если Q(\mathscr{G}_i) < Q^* то j^* := j; \;\; Q^* := Q(\mathscr{G}_i);
10:
11:
         если j - j^* \geqslant d то вернуть \mathcal{G}_{i^*};
```

## Случайный поиск с адаптацией (СПА)

# Рекомендации по выбору параметров r, T, h:

```
T \approx 10..50 — число итераций; r \approx 20..100 — число наборов, создаваемых на каждой итерации; h \approx \frac{1}{rn} — скорость адаптации;
```

#### Преимущества:

- трудоёмкость порядка  $O(Tr(j^*+d))$  операций;
- меньшее число параметров, по сравнению с генетикой;
- довольно быстрая сходимость.

#### Недостатки:

- при большом числе признаков СПА малоэффективен.

#### Резюме в конце лекции

- Отбор признаков надо вести по внешним критериям.
- Критерии регуляризации наиболее эффективны с вычислительной точки зрения.
- Для отбора признаков могут использоваться любые эвристические методы решения задачи дискретной оптимизации

$$Q(\mathscr{G}) o \min_{\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}}$$

- На практике хорошо зарекомендовали себя генетические алгоритмы.
- ГА, МГУА, СПА очень похожи на их основе легко создавать новые «симбиотические» алгоритмы.