Байесовский подход в теории вероятностей. Пример байесовских рассуждений.

Д.П. Ветров

8 ноября 2012 г.

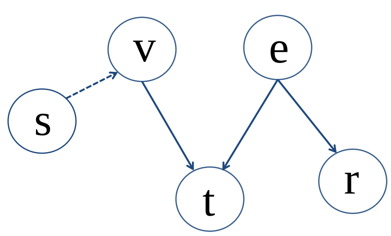
Аннотация

temp

1 Различия между байесовским и частотным подходам в теории вероятностей

	Частотный	Байесовский
Вероятность	Объективная неопределенность	субъективное незнание
Величины	Случайные и детерминированные	Все величины случайны
Метод вывода	Максимизация правдоподобия	Получение апостериорного распределения
Оценки	ML	MAP
Корректность	$n \gg 1$	n — любое

2 Пример байесовских рассуждений



Переменные t (срабатывание тревоги), v (наличие вора), e (было ли землетрясение), r (радиосообщение) — бинарные. Переменная s (уточненная статистика по криминогенной активности) непрерывная из отрезка $[0, 1]$.

$p(t=1\|v,e)$	v	e
0	0	0
0.1	0	1
1	1	0
1	1	1

$p(r=1\|e)$	e
0	0
0.5	1

Также известны $p(e=1)=10^{-2}$, $p(v=1)=2\times10^{-3}$, $p(v=1|s)=s$.

Шаг 1. Расчет $p(v=1|t=1)$:

$$p(v=1|t=1)=\frac{p(t=1|v=1)p(v=1)}{p(t=1|v=1)p(v=1)+p(t=1|v=0)p(v=0)} \tag{1}$$

Вероятности $p(t|v)$ вычисляем по правилу суммирования (маргинализации) вероятностей

$$p(t=1|v=1)=\sum_{e\in\{0,1\}}p(t=1|v=1,e)p(e)=1$$

$$p(t=0|v=1)=\sum_{e\in\{0,1\}}p(t=1|v=1,e)p(e)=0.1\cdot10^{-2}=10^{-3}$$

подставляем в (1)

$$p(v=1|t=1)=\frac{2\times10^{-4}}{2\times10^{-4}+10^{-3}}=\frac{1}{6}\approx17\%$$

Шаг 2. Расчет $p(v=1|t=1,s_0)$, где $s_0=2\times10^{-3}$. Заметим, что величины s и t независимы при условии v, поэтому справедливы соотношения

$$p(v=1|t=1,s_0)=\frac{1}{Z_v}\frac{p(v=1|t=1)p(v=1|s_0)}{p(v=1)}=\frac{1}{Z_v}\frac{1/6\cdot2\times10^{-3}}{2\times10^{-4}}=\frac{1}{Z_v}\frac{10}{6}$$

$$p(v=0|t=1,s_0)=\frac{1}{Z_v}\frac{p(v=0|t=1)p(v=0|s_0)}{p(v=0)}=\frac{1}{Z_v}\frac{5/6\cdot(1-2\times10^{-3})}{(1-2\times10^{-4})}\approx\frac{1}{Z_v}\frac{5}{6}$$

Отсюда $Z_v=15/6$, $p(v=1|t=1,s_0)=2/3\approx67\%$

Шаг 3. Расчет $p(v=1|t=1,s_0,r=1)$. Заметим, что мы умеем считать

$$p(v,t,e,r|s)=p(v|s)p(t|v,e)p(r|e)p(e).$$

Попробуем выразить искомое распределение через него

$$\begin{aligned}
p(v=1|t=1,s_0,r=1)&=\sum_e p(v=1,e|t=1,s_0,r=1)=\\
&=\sum_e p(v=1|t=1,e,s_0,r=1)p(e|t=1,r=1)=\\
&=\sum_e \frac{p(v=1,t=1,e,r=1|s_0)}{\sum_v p(v,t=1,e,r=1|s_0)}p(e|t=1,r=1)=\\
&=\sum_e \frac{p(v=1|s_0)p(t=1|v=1,e)p(r=1|e)}{\sum_v p(v|s_0)p(t=1|v,e)p(r=1|e)}p(e|t=1,r=1).
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь мы воспользовались независимостью s и e при известном t, поэтому $p(e|t,r,s)=p(e|t,r)$.

Заметим, что при $e = 0$ величина $p(r = 1|e)$ равна нулю, поэтому первое слагаемое в выражении (2) обращается в ноль.[1] Также несложно видеть, что $p(e = 1|t = 1, r = 1) = 1$, т.к. радио никогда не дает ложных сообщений о землетрясениях. Таким образом, имеем

$$\sum_e \frac{p(v=1|s_0)p(t=1|v=1,e)p(r=1|e)}{\sum_v p(v|s_0)p(t=1|v,e)p(r=1|e)} p(e|t=1,r=1) =$$
$$= \frac{p(v=1|s_0)p(t=1|v=1,e=1)p(r=1|e=1)}{\sum_v p(v|s_0)p(t=1|v,e=1)p(r=1|e=1)} p(e=1|t=1,r=1) =$$
$$= \frac{p(v=1|s_0)p(t=1|v=1,e=1)}{Z_v} = \frac{1}{Z_v} 2 \times 10^{-3} \cdot 1 \quad (3)$$

Аналогично

$$p(v=0|t=1,s_0,r=1) = \frac{p(v=0|s_0)p(t=1|v=0,e=1)}{Z_v} = \frac{1}{Z_v}(1 - 2\times 10^{-3}) \cdot 0.1 \approx \frac{1}{Z_v} 0.1,$$

отсюда $Z_v \approx 0.102$, $p(v = 1|t = 1, s_0, r = 1) \approx 2\%$