Анализ состава инвестиционного портфеля по данным о доходностях ценных бумаг в условиях нестационарного фондового рынка

Красоткина Ольга Вячеславовна
Тульский государственный университет

Марков Михаил
Markov Processes International, NJ, USA

Моттль Вадим Вячеславович
Вычислительный центр РАН

Пугач Илья Александрович
Московский физико-технический институт

Доходности активов и инвестиционного портфеля

Инвестиционный портфель: Совокупность видов активов $i = 1,...,n$, в которые вложен капитал инвестиционной компании.

Долевое распределение капитала: Вектор $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,...,\beta_n)$, выражающий доли общего объема капитала, вложенные в каждый из видов активов.

Бюджетное ограничение: $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$ – предположение, что капитал полностью вложен в ценные бумаги.

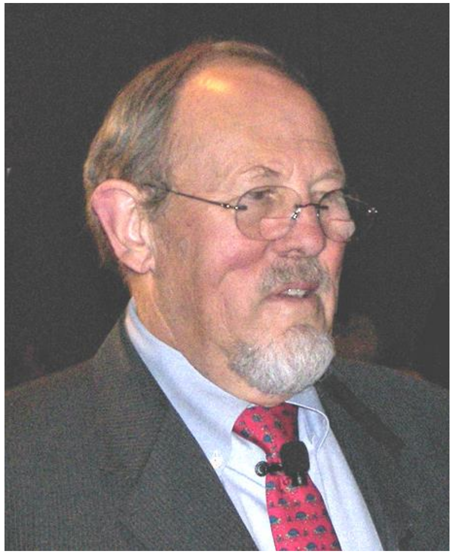
z_i^0 и z_i^1 – цены активов в начале и в конце **периода владения**,
z_{port}^0 и z_{port}^1 – стоимость портфеля в целом.

Доходность портфеля (return) за период владения: $y = (z_{port}^1 - z_{port}^0) / z_{port}^0$.

Доходности активов (либо их классов): $x_i = (z_i^1 - z_i^0) / z_i^0$.

Основное уравнение: $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_1 x_i = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}$, где $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,...,\beta_n)$, $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_1 = 1$ – долевое распределение капитала

Задача оценивания состава инвестиционного портфеля по известной информации о доходности



William F. Sharpe, Professor of Finance, Emeritus
Graduate School of Business, Stanford University

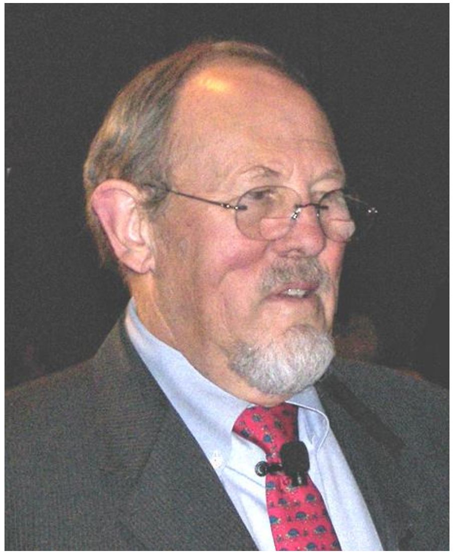
Лауреат Нобелевской премии по экономике 1990 года (совместно с **Harry M. Markowitz**):

– Capital Asset Pricing Model (CAPM)
– Sharpe Ratio for investment performance analysis
– Binomial method for the valuation of options
– The gradient method for asset allocation optimization
– **Returns Based Style Analysis (RBSA)** for evaluating the style and performance of investment funds

Доступная информация: $\left[(y_t, x_{t,i}, i=1,\dots,n), t=1,2,3,\dots\right]$ – временные ряды, образованные доходностями портфеля и активов, в которые предположительно инвестирован капитал, для последовательных периодов владения, например, рабочих дней биржи, месяцев, кварталов.

Уильям Шарп предложил аппроксимировать доходность портфеля небольшим числом биржевых индексов, решая задачу оценивания линейной регрессии при линейных ограничениях.	Задача квадратичного программирования: $\begin{cases}(\hat\beta_1,\dots,\hat\beta_n): \sum_{t=1}^{N}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2 \to \min \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1\end{cases}$

Задача оценивания состава инвестиционного портфеля по известной информации о доходности



William F. Sharpe, Professor of Finance, Emeritus
Graduate School of Business, Stanford University

Лауреат Нобелевской премии по экономике 1990 года (совместно с **Harry M. Markowitz**):

– Capital Asset Pricing Model (CAPM)
– Sharpe Ratio for investment performance analysis
– Binomial method for the valuation of options
– The gradient method for asset allocation optimization
– **Returns Based Style Analysis (RBSA)** for evaluating the style and performance of investment funds

Доступная информация: $\left[(y_t, x_{t,i}, i=1,\dots,n), t=1,2,3,\dots\right]$ – временные ряды, образованные доходностями портфеля и активов, в которые предположительно инвестирован капитал, для последовательных периодов владения, например, рабочих дней биржи, месяцев, кварталов.

Уильям Шарп предложил аппроксимировать доходность портфеля небольшим числом биржевых индексов, решая задачу оценивания линейной регрессии при линейных ограничениях.	Задача квадратичного программирования: $\begin{cases} (\hat{\beta}_1,\dots,\hat{\beta}_n): \sum_{t=1}^{N}\left(y_t - \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2 \to \min \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,\ \beta_i \geq 0 \end{cases}$

Некорректность модели Шарпа

Портфель Buy & Hold: Пассивная стратегия долгосрочного инвестирования капитала. Предполагается, что в течение некоторого времени количества акций разного вида в составе портфеля не изменяются.

$(m_i, i=1,...,n)$ – постоянное количество активов каждого вида

Однако в математической формулировке задачи Шарпа предполагается не постоянство количественного состава портфеля, а постоянство ценового распределения капитала $(\beta_i, i=1,...,n)$

Пусть $p_{t,i}, t=1,2,3,...$ – стоимости актива на начало каждого периода владения, допустим, каждого месяца. Тогда доходности актива есть отношения:

$$\beta_{t,i} = \frac{m_i p_{t-1,i}}{\sum_{j=1}^{n} m_j p_{t-1,j}}$$

Стоимость активов i-го вида в портфеле в начале периода

Стоимость активов всех видов

$\beta_{t,i} = \frac{m_i p_{t-1,i}}{\sum_{j=1}^{n} m_j p_{t-1,j}}$	Долевое распределение стоимости портфеля на начало t-го периода. Даже если количества активов каждого вида не изменяются, $m_i = const$, долевое распределение капитала будет изменяться.

Некорректность модели Шарпа

Портфель Buy and Hold: Пассивная стратегия долгосрочного инвестирования капитала. Предполагается, что в течение некоторого времени количества акций разного вида в составе портфеля $\left(m_i,\, i=1,\ldots,n\right)$ не изменяются.

Однако в математической формулировке задачи Шарпа предполагается не постоянство количественного состава портфеля $\left(m_i,\, i=1,\ldots,n\right)$, а постоянство ценового распределения капитала $\left(\beta_i,\, i=1,\ldots,n\right)$

Получается, что для корректности модели Шарпа

$$\begin{cases} (\hat{\beta}_1,\ldots,\hat{\beta}_n):\sum_{t=1}^{N}\left(y_t-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{t,i}\right)^2\to\min \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i=1,\;\; \beta_i\ge 0 \end{cases}$$

Надо предположить, что активы в последовательности периодов владения $t=1,\ldots,N$ все время докупались и продавались. Но за каждую покупку или продажу биржа берет плату (brokerage fee, trading fee). Это нереальное предположение. Однако и этого модель не предусматривает.

$\beta_{t,i}=\dfrac{(1+x_{t-1,i})\beta_{t-1,i}}{\sum_{j=1}^{n}(1+x_{t-1,j})\beta_{t-1,j}}$	Точное соотношение Buy & Hold. Необходимо учесть естественную динамику распределения капитала.

Наша корректная модель портфеля Buy & Hold

Обозначения

$$
\begin{cases}
u_{2,i} = (1+x_{1,i})u_{1,i}, \\
u_{3,i} = (1+x_{2,i})u_{2,i} = (1+x_{2,i})(1+x_{1,i})u_{1,i}, \\
u_{4,i} = (1+x_{3,i})u_{3,i} = (1+x_{3,i})(1+x_{2,i})(1+x_{1,i})u_{1,i}, \\
\qquad \cdots \\
u_{t,i} = \left(\prod_{s=1}^{t-1} (1+x_{s,i}) \right) u_{1,i} = \beta_{1,i} \prod_{s=1}^{t-1} (1+x_{s,i}).
\end{cases}
$$

Последовательность доходностей портфеля

$$
\hat{y}_t = \sum_{j=1}^{n} x_{t,j} \frac{v_{t-1,i}}{1+\hat{y}_{t-1}} \beta_{1,i}, \; t = 2,\dots,N
$$

$$
v_{t-1,i} = \prod_{s=1}^{t-1} (1+x_{s,i}), \;\; t \geq 2
$$

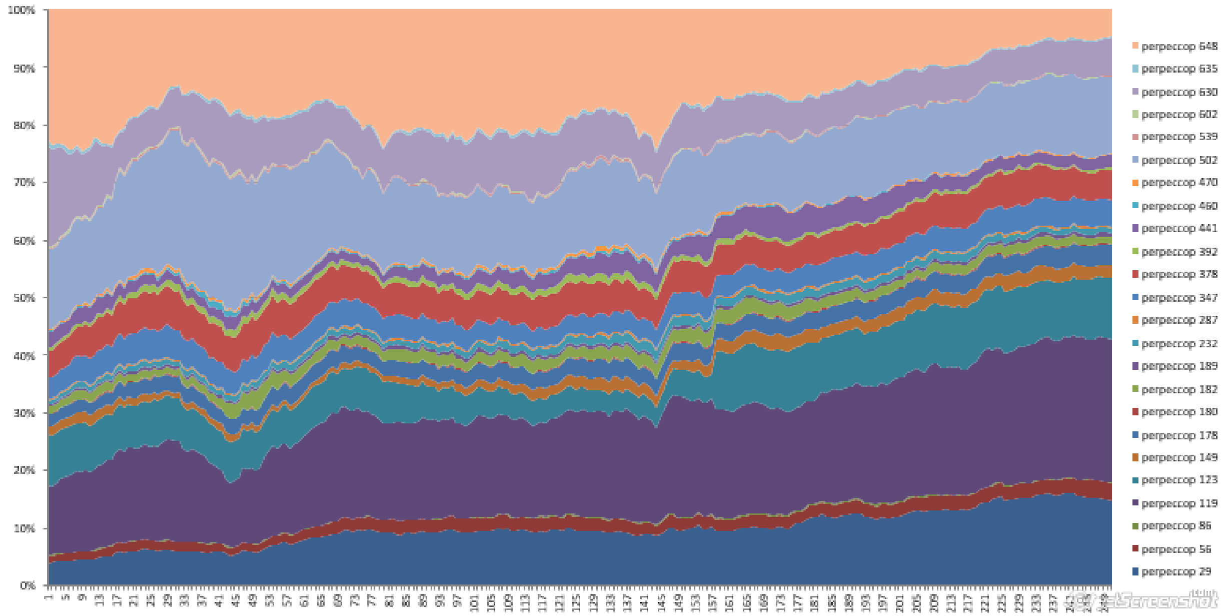
Критерий оценивания динамики распределения капитала в портфеле Buy & Hold по известным отчетным значениям его доходности:

$$
\begin{cases}
J(\beta_1,\dots,\beta_n, z_1,\dots,z_N) = \sum_{t=1}^{N} \left(y_t - z_t \right)^2 \to \min(\beta_1,\dots,\beta_n, z_1,\dots,z_N), \\
z_t \left(1 + z_{t-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} v_{t,i}\beta_i, \;\; t = 1,\dots,N, \;\; \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1.
\end{cases}
$$

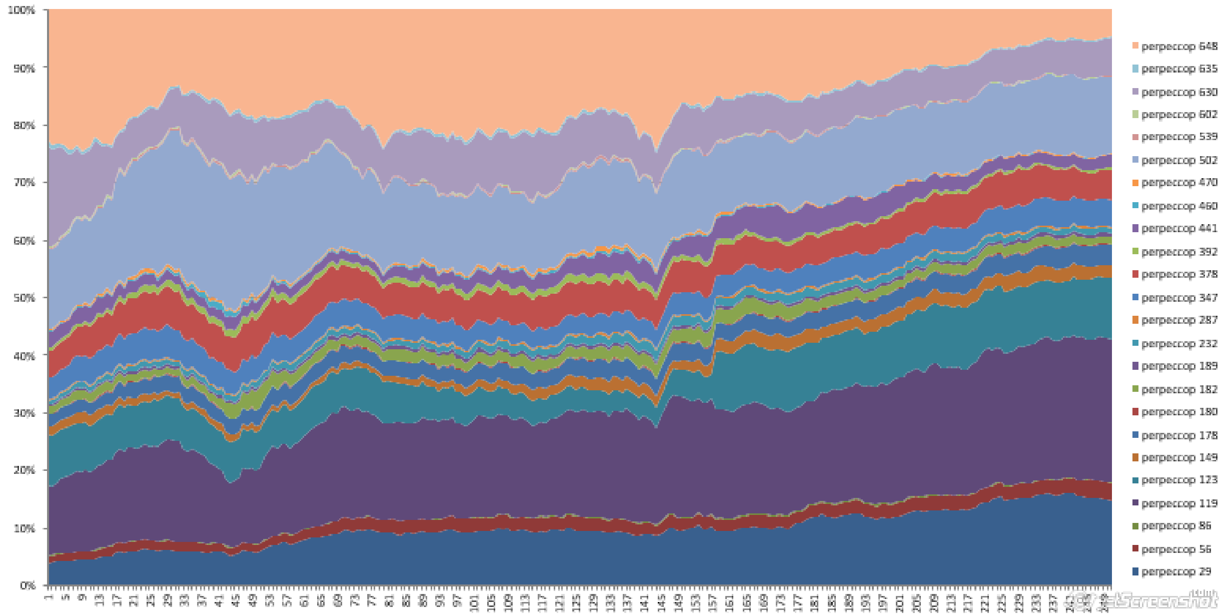
Ограничение не является линейным – это не задача квадратичного программирования.

Это и не задача выпуклого программирования –область поиска не является выпуклым многообразием. Тем не менее, опыт показывает, что для типовых массивов данных $\left(y_t, x_{t,i}, t = 1,\dots,N, i = 1,\dots,n \right)$ критерий является унимодальным.

Примеры численного решения задачи Buy & Hold



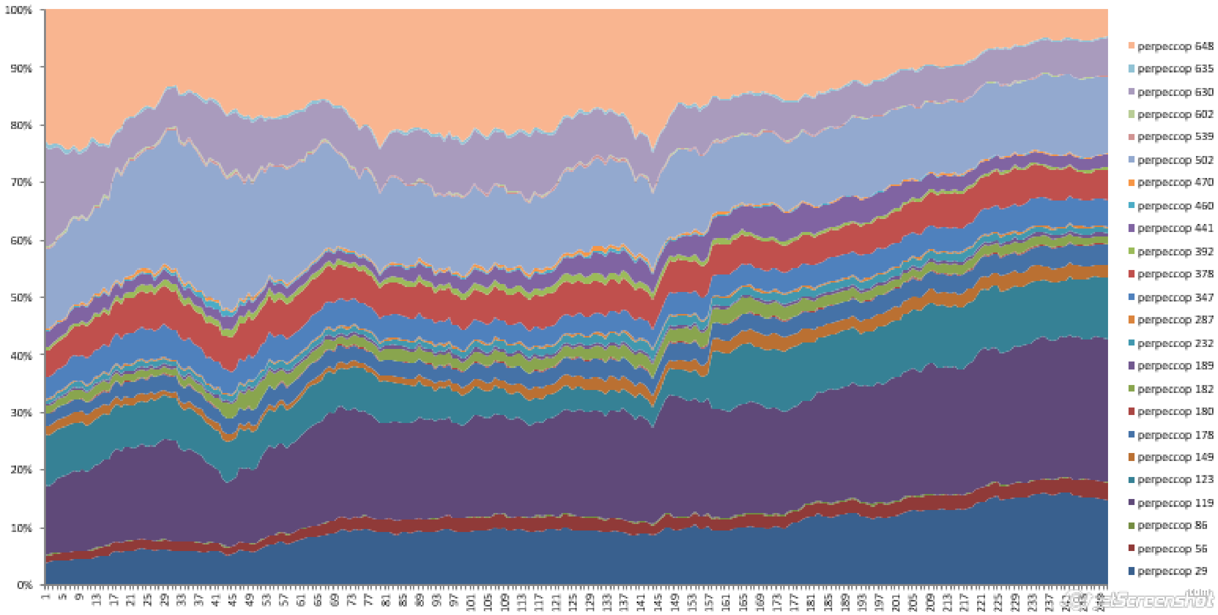
Примеры численного решения задачи Buy & Hold

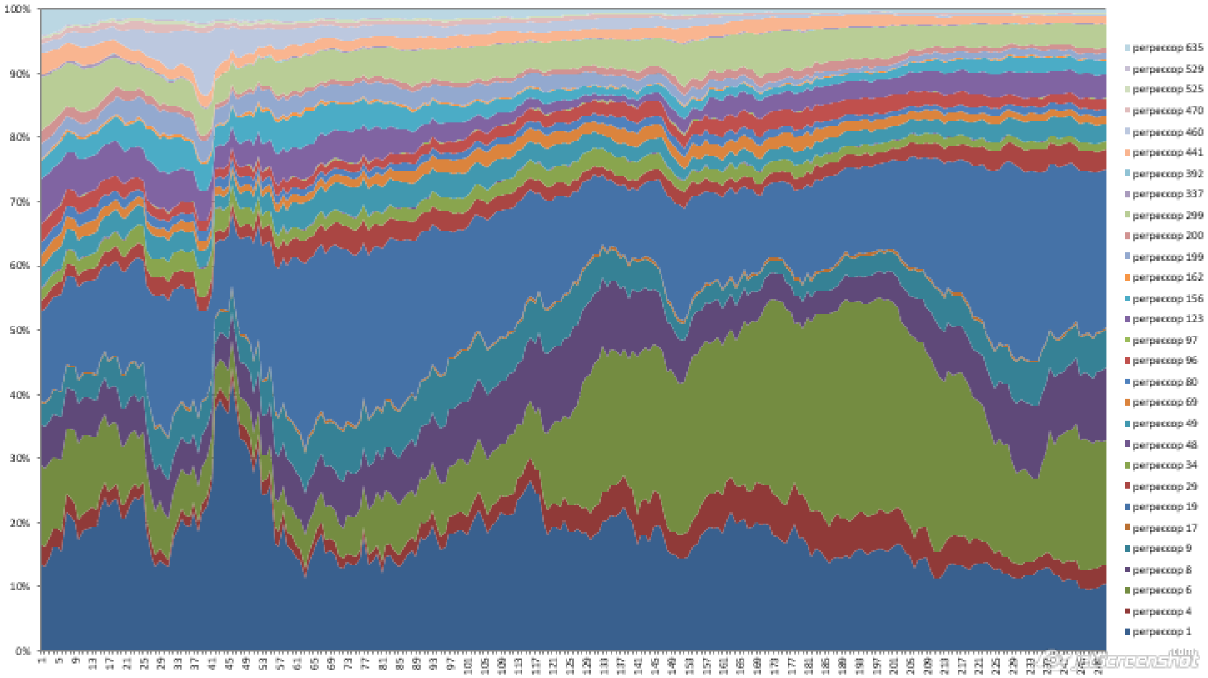


Прорамму написал
Илья Пугач

Выпускник магистратуры
Каф. «Интеллектуальные системы» МФТИ

Примеры численного решения задачи Buy & Hold





Прораммy написал
Илья Пугач

Выпускник магистратуры
Каф. «Интеллектуальные системы» МФТИ

Благодарности

Работа пока грантами РФФИ не поддержана.

19-37-50073 мол_нр,   И.В. Пугач, Севастополь – не поддержана

20-07-00565 А
Интеллектуальные методы анализа динамики биржевых данных,
О.В. Красоткина – пока нет решения

Спасибо за внимание!

Вопросы?