Методы оптимизации, ВМК, осень 2018

Семинар 5: Выпуклые функции

1 Определение и примеры

Определение 1.1 (Выпуклые функции)**.** Пусть U — вещественное векторное пространство, Q — непустое выпуклое множество в U. Функция $f : Q \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если для любых $x, y \in Q$ и любого $0 < \alpha < 1$ выполняется

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y). \tag{1.1}$$

Если это неравенство является строгим для всех $x \neq y$ и $0 < \alpha < 1$, то функция f называется *строго выпуклой*.

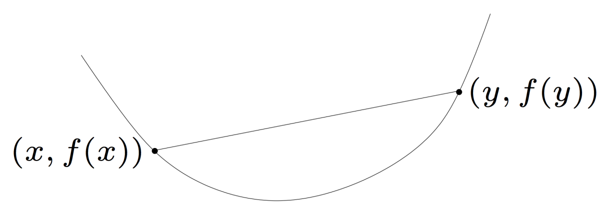

Рис. 1: Иллюстрация к определению выпуклой функции. Хорда лежит целиком над графиком функции.

Замечание 1.2. Заметим, что в этом определении подразумевается, что для любых двух допустимых точек $x, y \in Q$ функцию f возможно «вычислить» в любой промежуточной точке отрезка $[x, y]$. Именно поэтому в определении требуется, чтобы область определения Q функции f являлась выпуклым множеством.

Абсолютно аналогично вводится понятие вогнутой функции. Единственное отличие по сравнению с определением выпуклой функции состоит в том, что неравенство $\leq$ заменяется на $\geq$.

Определение 1.3 (Вогнутые функции)**.** Пусть U — вещественное векторное пространство, Q — непустое выпуклое множество в U. Функция $f : Q \to \mathbb{R}$ называется *вогнутой*, если для любых $x, y \in Q$ и любого $0 < \alpha < 1$ выполняется

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Если неравенство (1.1) является строгим для всех $x \neq y$ и $0 < \alpha < 1$, то функция f называется *строго вогнутой*.

Замечание 1.4. Из определения легко видеть, что функция f является (строго) выпуклой тогда и только тогда, когда функция $-f$ является (строго) вогнутой.

Пример 1.5 (Аффинная функция)**.** Пусть в пространстве U задано (произвольное) скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пусть $f : U \to \mathbb{R}$ — *аффинная функция*

$$f(x) := \langle a, x \rangle + \beta,$$

где $a \in U$ и $\beta \in \mathbb{R}$. Заметим, что для этой функции неравенство (1.1) переходит в равенство. Таким образом, аффинная функция является одновременно и выпуклой, и вогнутой (но не строго).

Пример 1.6 (Произвольная норма)**.** Пусть в пространстве U задана (произвольная) норма $\|\cdot\|$. Тогда функция $f : U \to \mathbb{R}$, заданная формулой

$$f(x) := \|x\|,$$

является выпуклой.

Действительно, пусть $x, y \in U$ и $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\| = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Здесь неравенство следует из неравенства треугольника для нормы и условия $0 < \alpha < 1$.

Замечание 1.7. Рассматриваемая функция $x \mapsto \|x\|$ не является строго выпуклой (почему?).

2 Простейшие свойства выпуклых функций

Утверждение 2.1 (Неравенство Йенсена)**.** *Пусть U — вещественное векторное пространство, Q — непустое выпуклое множество в U, и $f : Q \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Пусть также $x_1, \dots, x_k$ — точки во множестве Q и $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — неотрицательные коэффициенты, суммирующиеся в единицу: $\alpha_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда функция f является аффинной или когда все точки совпадают: $x_1 = \dots = x_k$.

Другими словами, неравенство Йенсена говорит о том, для выпуклой функции значение функции от выпуклой комбинации точек не превосходит соответствующей выпуклой комбинации значений функции.

Замечание 2.2. Неравенство Йенсена также обобщается и на случай выпуклой комбинации бесконечного (счетного или несчетного) числа точек. В случае счетного числа точек $x_1, x_2, \ldots \in Q$ соответствующие суммы переходят в бесконечные суммы $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i x_i$ и $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i f(x_i)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \geq 0$ и $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i = 1$. В наиболее общей форме (для несчетного числа точек) неравенство Йенсена формулируется в терминах вероятностных интегралов или математических ожиданий. Действительно, требование о том, что веса в выпуклой комбинации должны быть неотрицательными и суммироваться в единицу, в общем случае означает, что на множестве Q должно быть задано вероятностное распределение, по которому выполняется усреднение точек множества. Сформулируем неравенство Йенсена для случайных величин. Пусть функция f выпуклая, и X — случайная величина, принимающая значения во множестве Q. Тогда справедливо неравенство

$$f(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}f(X),$$

при условии, что соответствующие математические ожидания существуют.

Оказывается, что выпуклые функции и выпуклые множества тесно связаны. В частности, исследование выпуклости заданной функции всегда может быть сведено к исследованию выпуклости специального множества, ассоциированного с функцией, которое называется *надграфиком* (рис. 2).

Определение 2.3 (Надграфик)**.** Пусть U — вещественное векторное пространство, Q — непустое множество в U. *Надграфиком* функции $f : Q \to \mathbb{R}$ называется множество

$$\operatorname{Epi} f := \{(x, t) \in Q \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}.$$

(Это множество лежит в пространстве $U \times \mathbb{R}$.)

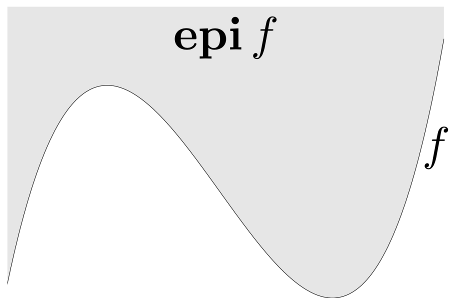

Рис. 2: Иллюстрация к определению надграфика функции.

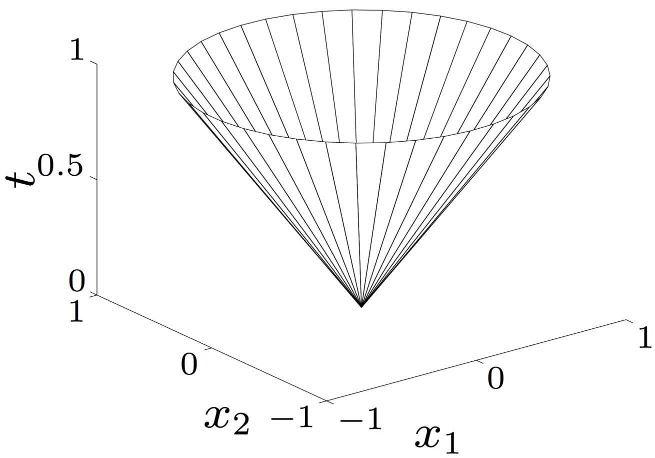

Рис. 3: Конус Лоренца для $x \in \mathbb{R}^2$.

Следующее утверждение можно считать альтернативным определением выпуклости функции.

Утверждение 2.4 (Определение выпуклости через надграфик)**.** *Пусть U — вещественное векторное пространство, Q — непустое выпуклое множество в U. Функция $f : Q \to \mathbb{R}$ является выпуклой тогда и только тогда, когда ее надграфик* $\mathrm{Epi}(f)$ *является выпуклым множеством в пространстве* $U \times \mathbb{R}$.

Пример 2.5 (Конус нормы)**.** Пусть в пространстве U задана (произвольная) норма $\|\cdot\|$. Рассмотрим множество

$$K := \{(x,t) \in U \times \mathbb{R}_+ : \|x\| \le t\},$$

представляющее собой надграфик функции $x \mapsto \|x\|$. Это множество называется *конусом нормы.* Согласно утверждению 2.4, множество множество K является выпуклым.

В случае, когда $U = \mathbb{R}^n$ и $\|x\| = \|x\|_2$ (евклидова норма), абстрактное множество K переходит в множество

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : \|x\|_2 \le t\} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : \|x\|_2 \le t\}.$$

Это множество называется *конусом Лоренца* (рис. 3) или *конусом второго порядка.*

Следующее утверждение показывает, что у выпуклой функции все линии уровня являются выпуклыми множествами.

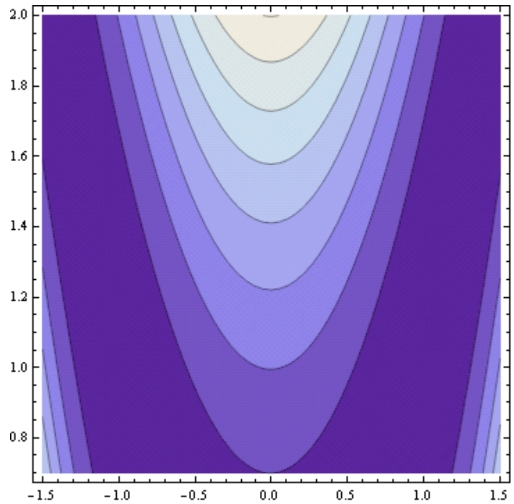

Рис. 4: Линии уровня функции Розенброка.

Утверждение 2.6 (Выпуклость множества линий уровня). *Пусть U — вещественное векторное пространство, Q — непустое множество в U, и пусть $f : Q \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ соответствующее множество линий уровня*

$$\mathrm{Lev}_f(\alpha) := \{x \in Q : f(x) \leq \alpha\}$$

является выпуклым.

Из этого утверждения сразу же следует, что в выпуклой задаче оптимизации множество оптимальных решений является выпуклым.

Следствие 2.7. *Пусть U — вещественное векторное пространство, Q — непустое множество в U, и пусть $f : Q \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Обозначим $f^* := \inf_{x \in Q} f(x)$. Тогда множество*

$$X^* := \{x \in Q : f(x) = f^*\}$$

является выпуклым.

Пример 2.8. С помощью утверждения 2.6 иногда можно устанавливать *невыпуклость* функции. Например, функция Розенброка, линии уровня которой приведены на рис. 4, не может быть выпуклой, потому что имеет невыпуклые линии уровня.

Замечание 2.9. Функции, которые обладают указанным выше свойством, т. е. что множество линий уровня $\mathrm{Lev}_f(\alpha)$ является выпуклым для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, называются *квазивыпуклыми*. Как показывает это утверждение, любая выпуклая функция является квазивыпуклой. Однако обратное утверждение не верно: существуют квазивыпуклые функции, которые не являются выпуклыми (см. рис. 5). Нам не понадобится понятие квазивыпуклой функции в этом курсе.

3 Расширение выпуклой функции на все пространство

При работе с выпуклыми функциями $f : Q \to \mathbb{R}$ оказывается удобным считать, что функция задана не только на своей «истинной» области определения Q, но также и за ее пределами. В этом случае говорят о расширении выпуклой функции на все пространство, и считают, что за пределами своей «истинной» области определения функция принимает значение $+\infty$.

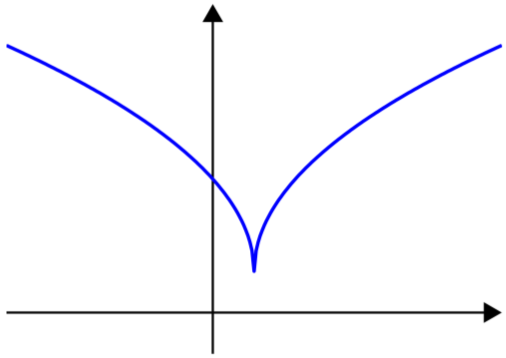

Рис. 5: Пример квазивыпуклой функции, которая не является выпуклой (из Википедии).

Определение 3.1 (Эффективная область определения)**.** Пусть U — векторное пространство, и $f : U \to \mathbb{R}^*$ — функция, принимающая значения во множестве расширенных вещественных чисел $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Будем называть *эффективной областью определения* функции f множество всех точек, в которых функция принимает конечные значения:

$$\operatorname{Dom} f := \{x \in U : |f(x)| < +\infty\}.$$

Определение 3.2 (Выпуклые и вогнутые расширеннозначные функции)**.** Пусть U — векторное пространство. Пусть функция $f : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ задана на всем пространстве и принимает расширенные вещественные значения. Функция f называется *выпуклой*, если для любых $x, y \in U$ и любых $0 < \alpha < 1$ выполнено

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y). \tag{3.1}$$

Аналогично, если $f : U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, и для всех $x, y \in U$ и $0 < \alpha < 1$ указанное выше неравенство выполнено с противоположным знаком, то функция f называется вогнутой.

Замечание 3.3. Согласно определению, выпуклая расширеннозначная функция может принимать только одно расширенное значение — значение $+\infty$. Аналогично, вогнутая вещественнозначная функция может принимать только $-\infty$. Функции, которые в некоторых точках принимают $+\infty$, а в некоторых $-\infty$, не рассматриваются.

Замечание 3.4 (Операции в $\mathbb{R}^*$)**.** Операции во множестве расширенных вещественных чисел подчиняются следующим естественным правилам.

(a) Операции с вещественными числами понимаются в обычном смысле.

(b) (Порядок) Любое вещественное число строго меньше $+\infty$, а также $-\infty < +\infty$. Аналогично для $-\infty$.

(c) (Сумма) Сумма $+\infty$ и любого вещественного числа, а также двух $+\infty$ равна $+\infty$. Аналогично для $-\infty$. Сумма $+\infty$ и $-\infty$ не определена.

(d) (Произведение) Произведение $+\infty$ и положительного вещественного числа, а также произведение $+\infty$ и $+\infty$ равно $+\infty$. Произведение $+\infty$ и отрицательного вещественного числа, а также произведение $+\infty$ и $-\infty$ равно $-\infty$. Аналогично для $-\infty$. Произведение «бесконечности» и нуля не определено.

Замечание 3.5. Определение 3.2 автоматически накладывает условие на выпуклость (эффективной) области определения функции f. Действительно, пусть $x, y \in \operatorname{Dom} f$ и $0 < \alpha < 1$. Поскольку $x, y \in \operatorname{Dom} f$, то $f(x)$ и $f(y)$ являются конечными. Отсюда следует, что правая часть в неравенстве (3.1)

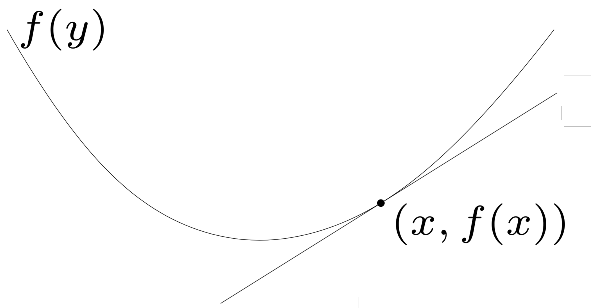

Рис. 6: Иллюстрация к условию выпуклости первого порядка. График функции лежит всюду выше касательной, проведенной к графику в любой точке x.

также конечна. Но это возможно лишь в том случае, когда и левая часть в неравенстве (3.1) конечна. Значит, $f(\alpha x + (1-\alpha)y) < +\infty$ и $\alpha x + (1-\alpha)y \in \operatorname{Dom} f$. Таким образом, расширенное определение выпуклости 3.2 эквивалентно введенному до этого обычному определению выпуклости 1.1 (в котором функция задана на множестве $Q := \operatorname{Dom} f$).

Пример 3.6 (Индикатор выпуклого множества)**.** Пусть U — векторное пространство, и пусть Q — выпуклое множество в U. Рассмотрим функцию $\delta_Q : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, заданную формулой

$$\delta_Q(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \in Q, \\ +\infty, & \text{если } x \notin Q. \end{cases}$$

Эта функция называется *индикатором* множества Q и является выпуклой (почему?).

4 Дифференциальные критерии выпуклости

Утверждение 4.1 (Условие выпуклости первого порядка)**.** *Пусть* $\operatorname{Dom} f$ *является открытым множеством, и функция* f *дифференцируема всюду на* $\operatorname{Dom} f$*. Функция* f *является выпуклой тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Dom} f$ *является выпуклым множеством и*

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

для всех $x, y \in \operatorname{Dom} f$*.*

Утверждение 4.2 (Дифференциальное условие оптимальности для выпуклой функции)**.** *Пусть* $f : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *— выпуклая функция,* $\operatorname{Dom} f$ *является открытым множеством, и пусть* $x^* \in \operatorname{Dom} f$*. Тогда* x^* *является глобальным минимумом функции* f*, если и только если* $\nabla f(x^*) = 0$*. Другими словами, любая стационарная точка автоматически является глобальным минимумом функции* f*.*

Доказательство. Согласно условию оптимальности первого порядка, для всех $x \in \operatorname{Dom} f$ справедлива оценка

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle = f(x^*).$$

□

Пример 4.3. Это утверждение позволяет для выпуклых дифференцируемых функций не задумываться о том, достигается ли глобальный минимум или нет. Например, вспомним задачу регрессии наименьших квадратов $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) := \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \right\}.$$

Эта функция является всюду дифференцируемой ($\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}^n$), и, значит, поиск ее минимума эквивалентен решению системы уравнений

$$\nabla f(x) = A^T(Ax - b) = 0.$$

Согласно установленному утверждению, решения задачи — это в точности все решения этой системы линейных уравнений, и только они. Таким образом, можно просто решать систему линейных уравнений и не переживать о том, что таким образом могут быть найдены какие-то стационарные точки, которые не являются глобальными решениями задачи. (Для невыпуклых функций так делать нельзя!)

Утверждение 4.4 (Условие выпуклости второго порядка)**.** *Пусть* $\mathrm{Dom}\, f$ *является открытым множеством, и функция* f *дважды дифференцируема на* $\mathrm{Dom}\, f$*. Функция* f *является выпуклой тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Dom}\, f$ *является выпуклым множеством и*

$$D^2 f(x)[h, h] =: \langle \nabla^2 f(x)h, h\rangle \geq 0$$

для всех $x \in \mathrm{Dom}\, f$ *и всех* $h \in U$*. Если* $U = \mathbb{R}^n$*, то это эквивалентно положительной полуопределенности гессиана:*

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0.$$

для всех $x \in \mathrm{Dom}\, f$*.*

Пример 4.5 (Одномерные выпуклые функции)**.** Следующие функции являются выпуклыми:

- (Экспонента) $\exp(x)$ выпукла на $\mathbb{R}$
- (Минус логарифм) $-\ln x$ выпукла на $\mathbb{R}_{++}$
- (Степенная функция)
  - x^{2p} для $p \in \{1, 2, \dots\}$ на $\mathbb{R}$
  - x^p для $p \geq 1$ на $\mathbb{R}_+$
  - $-x^p$ для $0 \leq p \leq 1$ на $\mathbb{R}_+$
  - $1/x^p$ для $p > 0$ на $\mathbb{R}_{++}$
- $x \ln x$ выпукла на $\mathbb{R}_+$

Доказывается через условие второго порядка.

Пример 4.6 (Квадратичная функция)**.** Пусть $A \in \mathbb{S}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$. Квадратичная функция

$$f(x) := \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$$

является выпуклой тогда и только тогда, когда $A \succeq 0$ и вогнутой тогда и только тогда, когда $A \preceq 0$. Это следует из условия второго порядка: $\nabla^2 f(x) = A$.

Пример 4.7 (Логарифм суммы экспонент)**.** Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \ln\left(\sum_{i=1}^n e^{x_i}\right)$$

является выпуклой. Ее гессиан равен

$$\nabla^2 f(x) = \mathrm{Diag}\{\pi(x)\} - \pi(x)\pi(x)^T,$$

где $\pi(x) := \exp(x)/\langle 1_n, \exp(x)\rangle$ (поэлементно). Гессиан оказывается положительно полуопределенным:

$$\langle \nabla^2 f(x)u, u\rangle = \langle \mathrm{Diag}\{\pi\}u, u\rangle - \langle \pi, u\rangle^2 = \sum_{i=1}^n \pi_i u_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \pi_i u_i\right)^2 \geq 0.$$

Последнее неравенство следует из неравенства Коши-Буняковского и того факта, что $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$.

Пример 4.8 (Минус логарифм определителя)**.** Функция

$$f(X) := -\ln \mathrm{Det}(X)$$

является выпуклой на $\mathbb{S}^n_{++}$. Действительно, рассмотрим

$$D^2 f(X)[H, H] = \langle X^{-1} H X^{-1}, H \rangle.$$

Покажем, что $D^2 f(X)[H, H] \geq 0$ для всех $X \in \mathbb{S}^n_{++}$ и всех $H \in \mathbb{S}^n$. Поскольку X является симметричной положительно определенной матрицей, можно рассмотреть ее корень $X^{1/2}$. Тогда

$$D^2 f(X)[H, H] = \langle X^{-1/2} H X^{-1/2}, X^{-1/2} H X^{-1/2} \rangle = \|X^{-1/2} H X^{-1/2}\|_F^2 \geq 0.$$

Следующее свойство позволяет с помощью производных доказать выпуклость на внутренности множества, а затем расширить это понятие на все множество — если функция непрерывна на множестве.

Утверждение 4.9 (Полезное свойство расширения на замыкание)**.** *Пусть функция f является выпуклой всюду на <u>внутренности</u> $\mathrm{Dom}\, f$, и непрерывной всюду на $\mathrm{Dom}\, f$. Тогда f является выпуклой на всем $\mathrm{Dom}\, f$.*

5 Операции, сохраняющие выпуклость функций

Утверждение 5.1 (Операции, сохраняющие выпуклость функций)**.** *Следующие операции сохраняют выпуклость функций.*

(a) (Положительная взвешенная сумма) Пусть U — вещественное векторное пространство и $f_1, \ldots, f_k : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — функции. Пусть также $c_1, \ldots, c_k$ — неотрицательные коэффициенты. Рассмотрим взвешенную сумму функций $f_1, \ldots, f_k$ с коэффициентами $c_1, \ldots, c_k$, т. е. функцию $\phi : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, определенную по формуле

$$\phi(x) := \sum_{i=1}^{k} c_i f_i(x).$$

Если каждая из функций $f_1, \ldots, f_k$ является выпуклой, тогда и ϕ будет выпуклой функцией.

(b) (Аффинная подстановка аргумента) Пусть U и V — вещественные векторные пространства, и $f : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — функция. Пусть $A : U \to V$ — аффинное преобразование. Рассмотрим функцию, получающуюся из функции f с помощью аффинной подстановки аргумента, т. е. функцию $\phi : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, определенную по формуле

$$\phi(x) := f(A(x)).$$

Если функция f выпуклая, тогда и функция ϕ также будет выпуклой.

(c) (Поточечный супремум) Пусть U — вещественное векторное пространство. Пусть I — произвольное (не обязательно конечное и не обязательно счетное) индексное множество, и пусть для каждого индекса $i \in I$ задана функция $f_i : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Рассмотрим поточечный супремум функций f_i, т. е. функцию $f : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, определенную по формуле

$$f(x) := \sup_{i \in I} f_i(x).$$

Если каждая из функций f_i является выпуклой, тогда и функция f также будет выпуклой.

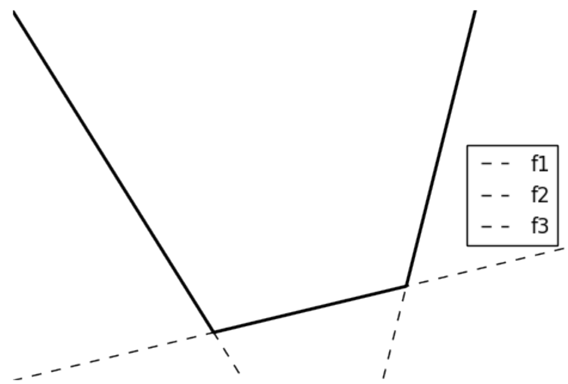

Рис. 7: Иллюстрация к примеру поточечный максимум. Так как линейная функция — выпуклая, максимум из линейных функций — выпуклая функция.

(d) *(Монотонная суперпозиция) Пусть U — вещественное векторное пространство, и $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$ — функции. Пусть также $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — функция. Рассмотрим функцию, являющуюся суперпозицией функции g и $f_1, \ldots, f_n$, т. е. функцию $\phi : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, определенную по формуле*
$$\phi(x) := g(f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$
Если каждая из функций $f_1, \ldots, f_n$ является выпуклой, а функция g является выпуклой и монотонно неубывающей, т. е. $g(y) \leq g(y')$ для всех $y \preceq y'$, тогда функция ϕ также будет выпуклой.

(e) *(Частичная минимизация) Пусть U и V — вещественные векторные пространства, и $f : U \times V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — функция. Рассмотрим функцию $\phi : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, определенную по формуле*
$$\phi(x) := \inf_{y \in V} f(x, y).$$
Если функция f является выпуклой (как функция одновременно двух переменных x и y), тогда ϕ является выпуклой функцией (при условии, что ϕ ни в одной точке не принимает значение $-\infty$).

Пример 5.2 (Взвешенная сумма и аффинная подстановка аргумента)**.** Пусть $a, b \in \mathbb{R}^k$ и $c \in \mathbb{R}^k_+$. Функция
$$f(x) := \sum_{i=1}^{k} c_i \exp(\langle a_i, x \rangle + b_i)$$
является выпуклой как взвешенная сумма экспонент с аффинной подстановкой аргумента.

Пример 5.3 (Поточечный максимум)**.** Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — выпуклые функции. Тогда
$$\phi(x) := \max\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$$
будет выпуклой функцией, потому что максимум — это частный случай супремума.

Пример 5.4 (Минимальное и максимальное собственные значения)**.** Работаем в пространстве симметричных матриц $\mathbb{S}^n$. Функция $\lambda_{\max}(X)$ является выпуклой, а функция $\lambda_{\min}(X)$ является вогнутой. Это следует из представления
$$\lambda_{\max}(X) := \max\{\langle Xu, u \rangle : u \in S_2^{n-1}\}, \qquad \lambda_{\min}(X) := \min\{\langle Xu, u \rangle : u \in S_2^{n-1}\},$$
где $S_2^{n-1} := \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\|_2 = 1\}$ — евклидова сфера в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Замечание 5.5 (Опорная функция множества)**.** Пусть M — произвольное (не обязательно выпуклое) непустое множество. Тогда *опорная функция* этого множества

$$S_M(y) := \sup_{x \in M} \langle y, x \rangle$$

является выпуклой как поточечный супремум от аффинных функций.

Пример 5.6 (Норма в степени)**.** Пусть $\| \cdot \|$ — произвольная норма. Тогда функция

$$f(x) := \|x\|^p$$

является выпуклой при $p \geq 1$ на всем пространстве. Здесь используется композиция выпуклой монотонно возрастающей одномерной функции x^p и выпуклой функции $\|x\|$.

Пример 5.7 (Расстояние до выпуклого множества)**.** Пусть Q — выпуклое множество, $\| \cdot \|$ — произвольная норма, и пусть $x \in U$, Тогда функция

$$f(x) := \rho(x, Q) := \inf_{y \in Q} \|x - y\|$$

является выпуклой как частичная минимизация $\|x-y\|+\delta_Q(y)$ по y (почему $\|x-y\|$ выпукла совместно по (x, y)?).

Пример 5.8. Пусть f — выпуклая функция. Тогда функция

$$\phi(x) := \inf_y \{f(y) : Ay = x\}$$

также выпуклая как частичная минимизация по y функции

$$g(x, y) := \begin{cases} f(y), & \text{если } Ay = x, \\ +\infty, & \text{иначе,} \end{cases}$$

которая является совместно выпуклой по (x, y).